Thema: Abschluss einer Menge

- Topologische Definition
- Metrische konstruktive ‘Definition’ ($=$ Satz 9) von dem Begriff ‘Abschluss einer Menge’

Abschluss einer Menge

Folgerung. Der Durchschnitt von Elementen einer jeder Familie von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$. Sei $\mathcal{CL}$ die Menge von abgeschlossenen Teilmengen von X, welche A enthalten. Die Menge

$$\bar{A} := \bigcap_{M \in \mathcal{CL}} M$$

nennen wir den Abschluss von A.

Bemerkung. $\bar{A}$ ist immer abgeschlossen, als Durchschnitt von abgeschlossenen Teilmengen. $\bar{A}$ ist wohldefiniert, weil es immer mindestens eine abgeschlossene Menge gibt, die A enthält, nämlich den ganzen Raum X.

Bemerkung. Ist A selber abgeschlossen, dann ist $\bar{A} = A$.

Bemerkung. Der Abschluss ist wieder ein topologischer Begriff.

Satz 9. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Abschluss $\bar{A}$ einer Teilmenge A besteht aus allen Grenzwerten von in X konvergierenden Folgen mit Elementen in A.

Beweis. Die Menge von allen Grenzwerten aller in X konvergierenden Folgen mit Elementen in A bezeichnen wir mit $\hat{A}$. Wir müssen zeigen, dass $\bar{A} \subseteq \hat{A}$ und $\hat{A} \subseteq \bar{A}$.

Wir zeigen $\hat{A} \subseteq \bar{A}$

Sei $x \in \hat{A}$; das bedeutet, dass eine Folge a_k mit Elementen in A existiert, welche gegen x konvergiert:

$$a_k \overset{k\to\infty}{\to} x.$$

Dann liegen a_k in jeder abgeschlossenen Menge, welche A enthält, und deswegen auch x. Daher liegt x auch im Abschluss $\bar{A}$ von A.

Wir zeigen jetzt $\hat{A} \supseteq \bar{A}$

Wir zeigen zuerst dass $\hat{A}$ abgeschlossen ist. Sei $x_k \stackrel{k\to\infty}{\to} x$ eine konvergente Folge mit Elementen in $\hat{A}$. Wir müssen zeigen, dass $x \in \hat{A}$.

Es existiert, für jedes $k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Elementen von A, welche gegen Element x_k konvergiert. Deswegen existiert, für jedes k, ein Element $a_k \in A$ mit $d(a_k, x_k) < 2^{-k}$. Aus der Dreieckungleichung bekommen wir:

$$d(a_k, x) \leq d(a_k, x_k) + d(x_k, x).$$

Auf der rechter Seite der Ungleichung steht die Summe der k-ten Element von 2 gegen Null konvergierender Folgen von reellen Zahlen. Links steht k-tes Element einer nichtnegativen Folge. Dann konvegiert die Folge $d(a_k, x)$ gegen Null.

Daher konvergiert die konstruierte Folge a_k gegen x; somit $x \in \hat{A}$.

Schließlich ist $\hat{A}$ abgeschlossen.

Letzter Schritt des Beweises

$$\bar{A} := \bigcap_{M \in \mathcal{CL}} M$$

wobei $\mathcal{CL}$ die Menge von abgeschlossenen Teilmengen von X ist, welche A enthalten.

- Wir haben gezeigt, dass $\hat{A}$ abgeschlossen ist.
- Offensichtlich, $\hat{A} \supseteq A$ (weil die Folge $a_k \equiv a$ offensichtlich gegen a konvergiert).
- Deswegen erfüllt $\hat{A}$ die Bedingungen auf $\mathcal{CL}$ aus der Definition vom Abschluss:

Dann ist $\hat{A}$ eine der Mengen, deren Durchschnitt $\bar{A}$ bildet, schließlich ist $\hat{A} \supseteq \bar{A}$. $\square$

Der Abstand eines Punktes zu einer abgeschlossen Menge ist positiv

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}.$$

Satz 10. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt: $x \in A \iff d(x, A) = 0$.

Beweis in Richtung $\Longrightarrow$ ist trivial: für $x \in A$ enthält die Menge $\{d(x, a) | a \in A\}$ von nichtnegativen Zahlen die Zahl 0 und daher ist Infimum davon 0.

Beweis in $\Longleftarrow$-Richtung: Sei $d(x, A) = 0$. Wir konstruieren eine Folge $a_k \in A$, welche gegen x konvergiert. Als a_1 nehmen wir einen Punkt von A, sodass Abstand bis x kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Er existiert, weil $\inf\{d(x, a) | a \in A\} = 0$. Als a_2 nehmen wir einen Punkt von A, sodass Abstand bis x kleiner als $\frac{1}{4}$ ist u.s.w: als a_k nehmen wir einen Punkt von A, sodass Abstand bis x kleiner als 2^{-k} ist (wir müssen nicht sicherstellen, dass die Punkten a_k unterschiedlich sind. Z.B. wenn $x \in A$ liegt, können wir alle Elementen der Folge gleich x setzen).

Die Folge a_k konvergiert gegen x, weil $0 \leq d(a_k, x) < 2^{-k}$. Weil A abgeschlossen ist, liegt x in A. Satz 10 ist bewiesen. □