Thema: ‘Normalität’ von metrischen Räumen

- Trennungseigenschaften
- Normalität

Satz 11. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt: für zwei beliebige abgeschlossene disjunkte Teilmengen $A, B \subseteq X$ gibt es disjunkte offene Mengen U_A, U_B sodass $A \subseteq U_A$, $B \subseteq U_B$.

Umgangssprachlich: Man kann zwei abgeschlossenen Mengen trennen.

Bemerkung. Die Aussage ist 'topologisch': wir haben gesehen, dass die beide Begriffe, die vorkommen, "offene" und "abgeschlossene" Mengen, nur Topologie benutzen. Sie ist aber nicht für alle topologischen Räumen richtig.
Topologische Räume, die die Trennungseigenschaft erfüllen, heißen normal, daher das Wort 'Normalität' in Überschrift der Folie.

Beweis von Satz 11

Satz 11. Für abgeschlossene disjunkte Teilmengen $A, B \subseteq X$ gibt es disjunkte offene Mengen U_A, U_B sodass $A \subseteq U_A$, $B \subseteq U_B$.

Für jeden Punkt $a \in A$ setzen wir $r_a := \frac{1}{2}d(a, B)$. Nach Satz 10 ist $r_a > 0$. Analog setzen wir $r_b := \frac{1}{2}d(A, b)$ für jeden Punkt $b \in B$. Die Vereinigungen $U_A := \bigcup_{a\in A} B_{r_a}(a)$ und $U_B := \bigcup_{b\in B} B_{r_b}(b)$ sind offen als Vereinigung von offenen Mengen. Offensichtlich, $U_A \supseteq A$ und $U_B \supseteq B$.

Um zu zeigen, dass $U_A \cap U_B = \varnothing$, machen wir einen Widerspruchsbeweis. Sei also $x \in U_A \cap U_B$. Dann existieren $a \in A$ und $b \in B$ mit

$$d(x, a) < \tfrac{1}{2}d(a, B) \ , \quad d(x, b) < \tfrac{1}{2}d(A, b).$$

Dann ist $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{1}{2}d(a, B) + \frac{1}{2}d(A, b)$. Aber $d(a, B) \leq d(a, b)$, weil $d(a, B)$ Infimum einer Menge ist, welche $d(a, b)$ enthält. Analog, $d(A, b) \leq d(a, b)$. Wir setzen diese zwei Ungleichungen oben ein, und bekommen eine offensichtlich falsche Aussage

$$d(a, b) < \tfrac{1}{2}d(a, B) + \tfrac{1}{2}d(A, b) \leq \tfrac{1}{2}d(a, b) + \tfrac{1}{2}d(a, b) \leq d(a, b).$$

Der Widerspruch beweist Satz 11. $\square$

Folgerungen aus Satz 11 (Trennungseigenschaften von metrischen Räumen)

Satz 11. Für abgeschlossene disjunkte Teilmengen $A, B \subseteq X$ gibt es disjunkte offene Mengen U_A, U_B sodass $A \subseteq U_A$, $B \subseteq U_B$.

Folgerung (Hausdorff-Eigenschaft). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x, y \in X$. Ist $x \neq y$, dann gibt es disjunkte Umgebungen $U(x)$ und $U(y)$.

Folgerung (T2-Eigenschaft). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$, und $A \subseteq X$ eine abgeschlossenen Menge sodass $x \notin A$. Dann gilt: es gibt eine Umgebung $U(x)$ und eine offene Menge U_A, welche A enthält, sodass $U_A \cap U(x) = \varnothing$.