Stetigkeit

Def. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, falls

$$\forall x_0 \in X \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x \text{ mit } \ d_X(x, x_0) < \delta \text{ gilt } d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Ich habe die Definition absichtlich in der Form gegeben, in welcher sie in der Analysis-Vorlesung vorkommt. Wir können die Definition auch wie folgt umformulieren (nur die zweite Hälfte der Quantorenformel ist betroffen):

$$\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x \in B_\delta^X(x_0) \ \text{ gilt } \ f(x) \in B_\varepsilon^Y(f(x_0)).$$

Bemerkung. In Analysis hat man zuerst Stetigkeit in einem Punkt definiert; stetige Funktionen in Analysis sind die Funktionen, die in allen Punkten stetig sind. Wir könnten das auch machen - uns interessieren aber nur Abbildungen, die in jedem Punkt stetig sind.

Stetigkeit als Folgen-Stetigkeit

$$\boxed{\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \mid \ \forall x \in B^X_\delta(x_0) \ \text{ gilt } f(x) \in B^Y_\varepsilon(f(x_0)).}$$

Satz 12. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann gilt: die Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig, g.d.w. für jede konvergenten Folge $x_k \in X$, $x_k \overset{k\to\infty}{\to} x$ auch die Folge $y_k := f(x_k)$ konvergiert, und zwar gegen $f(x)$.

Beweis in Richtung $\Rightarrow$. Sei $f : X \to Y$ stetig und $x_k \overset{k\to\infty}{\to} x$. Für $\epsilon > 0$ sei δ wie oben. Da $d(x_k, x) \overset{k\to\infty}{\to} 0$, gibt es ein N, sodass alle Elemente x_n mit $n > N$ in $B^X_\delta(x)$ liegen.
Dann liegen alle $f(x_n)$ in $f(B^X_\delta(x)) \subseteq B^Y_\varepsilon(f(x))$, und die Folge $y_n := f(x_n)$ konvergiert gegen $f(x)$.

(Widerspruchs-)Beweis in Richtung $\Leftarrow$.

Satz 12. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann gilt: die Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig, g.d.w. für jede konvergenten Folge $x_k \in X$, $x_k \stackrel{k\to\infty}{\to} x$ auch die Folge $y_k := f(x_k)$ konvergiert, und zwar gegen $f(x)$.

f erfülle die orange gefärbte Aussage in der Box.
Angenommen, f ist nicht stetig, also

$$\exists x_0 \in X\, \exists \varepsilon > 0 \ \text{ sodass } \ \forall\, \delta > 0\, \exists x \in B_\delta(x_0) \ \text{ sodass } \ f(x) \notin B_\varepsilon^Y(f(x_0)).$$

Dann können wir eine Folge x_k konstruieren, die gegen x_0 konvergiert, aber die Folge $y_k = f(x_k)$ nicht gegen $f(x_0)$.

Dazu nehmen wir, zu ε aus der Quantoren-Formel oben, eine Folge von δ: $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_2 = \frac{1}{4}$, ..., $\delta_k = \frac{1}{2^k}, \ldots$.

Für jedes solches δ_k existiert ein $x_k \in B_{\delta_k}(x_0)$ sodass $f(x_k) \notin B_\varepsilon^Y(f(x_0))$. Die Folge x_k konvergiert gegen x_0, weil $d_X(x_0, x_k) < \delta_k = 2^{-k}$; die Folge $f(x_k)$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$, weil $d_Y(f(x_k), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Widerspruch zur orangenen Aussage beweist, dass f stetig seien muss. $\square$

Stetigkeit ist ein topologischer Begriff

Satz 13. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann gilt: die Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig, g.d.w. für jedes $A \in \Omega_Y$ für das Urbild $f^{-1}(A) \in \Omega_X$ gilt.

In Worten: Eine Abbildung ist stetig, g.d.w. das Urbild jeder offenen Menge auch offen ist.

Wir sehen also, dass man nur die Topologien benötigt, um Stetigkeit zu definieren.

Beweis des Satzes 13.

Satz 13. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann gilt: die Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig, g.d.w. für jedes $A \in \Omega_Y$ für das Urbild $f^{-1}(A) \in \Omega_X$ gilt.

Beweis in Richtung $\Longleftarrow$. Für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ betrachten wir $B_\varepsilon^Y(f(x))$. Da $B_\varepsilon^Y(f(x)) \in \Omega_Y$, ist $f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x))) \in \Omega_X$.

Also existiert für jeden Punkt aus $f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x)))$, und deswegen auch für x, ein Ball $B_\delta^X(x)$ sodass $B_\delta^X(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(x)))$.

Offensichtlich haben wir für jeden Punkt x' des Balles die Bedingung $d(f(x'), f(x)) < \varepsilon$, welche wir in der Definition von Stetigkeit verlangt haben.

Beweis in Richtung $\Longrightarrow$

Satz 13. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann gilt: die Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig, g.d.w. für jedes $A \in \Omega_Y$ für das Urbild $f^{-1}(A) \in \Omega_X$ gilt.

Zuerst merken wir, dass das "Komplimentbilden" und "Urbildnehmen" vertauschbare Operationen sind: $\forall A \subseteq Y$ gilt

$$\left(f^{-1}(A)\right)^c = f^{-1}(A^c).$$

Da nach Satz 8a eine Menge g.d. offen ist, wenn ihr Kompliment abgeschlossen ist, müssen wir zeigen, dass für jede stetige Abbildung f das Urbild einer jeden abgeschlossenen Menge auch abgeschlossen ist.

A ist abgeschlossen, falls aus $A \ni a_k \overset{k\to\infty}{\to} x$ folgt, dass $x \in A$ liegt.

Sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen, $A := f^{-1}(B)$. Sei $A \ni a_k \overset{k\to\infty}{\to} x$; wir müssen zeigen, dass $x \in A$. Wir wissen nach Satz 12, dass die Folge $f(a_k)$ gegen $f(x)$ konvergiert. Da $f(a_k)$ in B liegt, ist $f(x) \in B$. Dann ist $x \in f^{-1}(B) = A$. Satz 13 ist bewiesen. $\square$

Verkettung von stetigen Abbildung ist stetig

Folgerung. Seien (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) metrische Räume und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ auch stetig.

Die Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig, g.d.w. für jedes $A \in \Omega_Y$ für das Urbild $f^{-1}(A) \in \Omega_X$ gilt.

Beweis. Sei $A \in \Omega_Z$, dann ist $g^{-1}(A) \in \Omega_Y$.
Dann ist $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) \in \Omega_X$. Also ist das Urbild bzgl. $g \circ f$ von beliebigen offenen $A \subseteq Z$ auch offen in X, und die Abbildung $g \circ f$ ist stetig. $\square$