Konstruktionen von stetigen Abbildungen

Bsp. Wir betrachten zwei Topologien, Ω_1 und Ω_2, auf einem Raum X mit $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ (z.B. die Topologien von zwei Metriken d_1 und d_2 auf X mit $d_1 \leq d_2$; nach Folgerung aus Satz 7 gilt dann $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$).

In diesem Fall ist die Identitätsabbildung, betrachtet als die Abbilidung von (X, Ω_2) nach (X, Ω_1), stetig.

Erklärung. Das Urbild jeder Menge bzgl. der Identitätsabbildung ist die Menge selbst.Liegt sie in Ω_1 (also, offen bzgl. der ersten Topologie), dann liegt sie auch in Ω_2; die Abbildung erfüllt dann die 'topologische' Definition von Stetigkeit, aus Satz 13.

Bsp. Die 'Identitätsabbildungen' von ℓ_1 nach ℓ_2 und von ℓ_2 nach ℓ_∞ sind stetig.

Weitere Beispiele/Konstruktionen von stetigen Abbildungen

Bsp. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume; wir betrachten $X \times Y$ mit der Produktmetrik.

$$\boxed{d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}.}$$

Dann sind die Projektionsabbildung

$$\pi_X : X \times Y \to X \ , \quad \pi(x, y) = x,$$

sowie die Inklusionsabbildung

$$i : X \to X \times Y \ , \quad i(x) = (x, y_0),$$

wobei y_0 ein fest gewählter Punkt von Y ist, stetig.

Erklärung. Am besten argumentieren wir mit Satz 12 (Stetigkeit als Folgen-Stetigkeit). Wie wir in Vorl. 2 gesehen haben, ist die Konvergenz einer Folge (x_k, y_k) in $X \times Y$ äquivalent zur gleichzeitigen Konvergenz von x_k und y_k. Wir haben es zwar in $\mathbb{R}^2$ gezeigt, die Argumentation kann man aber für das Produkt von beliebigen Räumen verallgemeinern.

Arithmetische Operationen stetiger Abbildungen nach $\mathbb{R}$

Bsp. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen nach $\mathbb{R}$ mit der Standard-Metrik. Dann sind die Abbildungen $f + g,\ \ f \cdot g,\ \ \mathrm{const} \cdot f,\ \ \frac{f}{g}$ stetig (die letzte ist auf der Teilmenge von X definiert sodass $g(x) \neq 0$).

Erklärung. Man die Abbildungen als Verkettung von stetigen Abbildungen darstellen, z.B. $x \mapsto f(x) + g(x)$ mit:

$$D : X \to X \times X,\ D(x) = (x, x),$$

$$P : X \times X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ,\ P(x, y) = (f(x), g(y))$$

und

$$p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ p(x, y) = x + y.$$

Zusammenhängende Räumen

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Er heißt zusammenhängend, wenn jedes Paar von zwei disjunkten offenen Mengen A und B mit $A \cup B = X$ gilt, dass $A = \varnothing$ oder $B = \varnothing$.

In Worten: Ein Raum ist zusammenhängend, wenn es keine nichttriviale Zerlegung in disjunkten offenen Teilmengen gibt.

Bemerkung. Da das Kompliment von offenen Mengen abgeschlossen ist, kann man in Definition oben "offene" mit "abgeschlossenen" ersetzen.

Bemerkung. Wir sehen, dass die Eigenschaft, zusammenhängend zu sein, eine topologische Eigenschaft ist.

Intervalle sind zusammenhängend

Bsp. Das Intervall $[0,1]$ mit der Standard-Metrik ist zusammenhängend.

Beweis. Sei $[0,1] = A \cup B$ eine disjunkte Zerlegung in zwei abgeschlossenen Mengen. Wir müssen zeigen, dass $A = \varnothing$ oder $B = \varnothing$. O.B.d.A. ist $0 \in A$. Sei $B \neq \varnothing$, wir betrachten $b := \inf_{x \in B}(x)$. Es ist klar, dass $b \in [0,1]$ ist; da B abgeschlossen ist, liegt $b \in B$. Also, $b > 0$.
Dann liegen alle Punkte des Intervalls $[0,b)$ in A. Die Folge $a_k := (1 - 2^{-k})b$ liegt dann volständig in A, konvergiert aber gegen $b \in B$; wir haben also einen Widerspruch bekommen.

Bsp. Ein Intervall ohne einen inneren Punkt ist nicht zusammenhängend.

Erklärung. O.B.d.A. ist das Intervall gleich $[0,1]$ und der innere Punkt ist a, $0 < a < 1$. Dann konstruiert man sofort die Zerlegung: $A = [0,a)$, $B = (a,1]$. Die beide Mengen sind in $[0,1] \setminus \{a\}$ offen (und gleichzeitig abgeschlossen) und keine davon ist $\varnothing$.

Bild von zusammenhängenen Raum ist zusammenhängend

Satz 14. Seien (X, d_X) ein zusammenhängender metrische Raum, (Y, d_Y) ein metrischer Raum und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Wir betrachten das Bild $f(X) \subseteq Y$ mit der von Y induzierten Metrik. Dann gilt: $f(X)$ ist zusammenhängend.

Wir beweisen zuerst eine wichtige Hilfsaussage. Sie ist einfach, aber wichtig; deswegen formulieren wir sie als Satz. Dann kehren wir zum Beweis von Satz 14 zurück.