Induzierte Topologie

Satz 15. Sei (X, d) ein metrische Raum und $Y \subseteq X$, $Y \neq \varnothing$. Wir betrachten die induzierte Metrik auf Y, $d_Y(a, b) = d_X(a, b)$ (und benutzen den gleichen Buchstaben d für d_X und d_Y). Dann gilt: $A \in \Omega_X \Rightarrow A \cap Y \in \Omega_Y$ und $B \in \Omega_Y \Rightarrow \exists A \in \Omega_X : A \cap Y = B$.

Beweis. Sei $A \in \Omega_X$, dann liegt für jedes $a \in A$ ein Ball $B_r^X(a)$ in A. Für $a \in A \cap Y$ ist nach Definition des Balles $B_r^Y(a) = Y \cap B_r^X(a)$; also liegt der Ball $B_r^Y(a)$ vollständig in $Y \cap A$ und diese Menge ist offen.
Ist $B \in \Omega_Y$, so gibt es für $b \in B$ ein $r_b > 0$ mit $B_{r_b}^Y(b) \subseteq B$, also $B = \bigcup_{b \in B} B_{r_b}^Y(b)$. Dann ist $B = (\bigcup_{b \in B} B_{r_b}^X(b)) \cap Y$, also $A := \bigcup_{b \in B} B_{r_b}^X(b) \in \Omega_X$. □

Bemerkung. In der Topologie benutzt man die Aussage des Satzes 15 als Definition der induzierten Topologie: für einen topologischen Raum (X, Ω) und eine nichtleere Teilmenge $Y \subseteq X$ definieren wir $\Omega_Y := \{A \cap Y \mid A \in \Omega\}$. Die Eigenschaften aus der Definition einer Topologie sind dann automatisch erfüllt.

Folgerung aus Satz 15

$$\boxed{B \in \Omega_Y \Rightarrow \exists A \in \Omega_X : A \cap Y = B}$$

Folgerung. Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist $f : X \to f(X)$ auch stetig.

Beweis. Folgt sofort aus der 'topologischen' Definition der Stetigkeit, da $A \cap f(X)$ und A das selbe Urbild haben.

Beweis von Satz 14

Satz 14. Seien (X, d_X) ein zusammenhängender metrischer Raum, (Y, d_Y) ein metrischer Raum und f eine stetige Abbildung. Dann ist das Bild $f(X) \subseteq Y$ mit der induzierten Metrik ist zusammenhängend.

Beweis. Wie wir in Folgerung aus Satz 15 gezeigt haben, ist die Abbildung f betrachtet als Abbildung $f : X \to f(X)$ stetig.
Angenommen, $f(X)$ ist nicht zusammenhängend, so gibt es eine nichtriviale disjunkte Zerlegung $f(X) = A \cup B$ in zwei offenen Mengen A und B. Die Mengen $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ sind offen, haben keine Schnittpuntke, keine davon ist $\varnothing$ (weil weder A noch B leer sind). Also bekommen wir Widerspruch zu der Annahme, dass X zusammenhängend ist. $\square$

Zwischenwertsatz als Folgerung von Satz 14

Satz 14. Seien (X, d_X) ein zusammenhängender metrischer Raum, (Y, d_Y) ein metrischer Raum und f eine stetige Abbildung. Dann ist das Bild $f(X) \subseteq Y$ mit der induzierten Metrik ist zusammenhängend.

Folgerung (Zwischenwertsatz). Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert ist. Dann existiert zu jedem $u \in [f(a), f(b)]$ (bzw. $u \in [f(b), f(a)]$ falls $f(b) < f(a)$) ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = u$.

Beweis. O.B.d.A. sei $f(a) \leq f(b)$. Wir nehmen an, dass für ein $u \in [f(a), f(b)]$ kein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = u$ existiert. Dann wäre das Bild eines zusammenhängenden metrischen Raums $[a, b]$ nicht zusammenhängend, weil $u \notin f([a, b])$ liegt; denn $(-\infty, u) \cap f([a, b])$ und $f([a, b]) \cap (u, \infty)$ wäre eine Zerlegung). Das widerspricht Satz 14. $\square$

Wegzusammenhängende Räume

Def. Sei (X, d) ein metrische Raum. Eine Kurve ist eine stetige Abbildung $c : [t_1, t_2] \to X$. Eine Kurve, sodass $c(t_1) = x$ und $c(t_2) = y$ heißt Weg zwischen x und y.

Def. Ein metrischer Raum (X, d) heißt wegzusammenhängend, wenn man je zwei Punkte mit einem Weg verbinden kann.

Bsp. Intervalle sind wegzusammenhängend.

Satz 16. Ein wegzusammenhängender metrischer Raum ist zusammenhängend.

Bemerkung. Beispiele von nicht wegzusammenhängenden, aber zusammenhängenden metrischen Räumen, werden auf der Tafel gegeben.

Bemerkung. Selbstverständlich folgt aus Satz 16, dass jedes Intervall zusammenhängend ist, was wir vorher direkt bewiesen haben. Wir werden aber sehen, dass der Beweis von Satz 16 verwendet, dass Intervalle zusammenhängend sind.

Widerspruchsbeweis. Sei (X, d) wegzusammenhängend, aber nicht zusammenhängend. Seien A, B die offenen Mengen sodass $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = X$, $A \neq \varnothing$ und $B \neq \varnothing$.
Wir nehmen $a \in A$ und $b \in B$ und betrachten den Weg $c : [0, 1] \to X$, welcher a und b verbindet: $c(0) = a, c(1) = b$.

Wir betrachten jetzt $c^{-1}(A)$ und $c^{-1}(B)$. Beide sind nicht leer, weil $0 \in c^{-1}(A)$ und $1 \in c^{-1}(B)$. Beide sind offen nach Satz 13, als Urbilder offener Mengen.
Außerdem ist $c^{-1}(A) \cup c^{-1}(B) = [0, 1]$, weil $A \cup B = X$, und der Durchschnitt von diesen Mengen ist leer, weil $A \cap B = \varnothing$. Also haben wir eine nichtriviale Zerlegung des Intervalls in zwei offenen Mengen; wir haben aber gezeigt (Bsp. auf Seite 12), dass dies nicht möglich ist. Der Widerspuch beweist den Satz. $\square$

Verallgemeinerung vom Zwischenwertsatz

Zwischenwertsatz. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert ist. Dann existiert zu jedem $u \in [f(a), f(b)]$ (bzw. $u \in [f(b), f(a)]$ falls $f(b) < f(a)$) ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = u$.

Wir können im Zwischenwertsatz oben das Intervall $[a, b]$ mit einer beliebigen zusammenhängenden Menge ersetzen; die Aussage bleibt richtig:

Satz 17. Sei (X, d) zusammenhängend und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion. Dann existiert zu jedem $u \in (\inf_{x\in X}(f(x)), \sup_{x\in X}(f(x)))$ ein $x \in X$ mit $f(x) = u$.

Der Beweis ist im Wesentlichen wie unserer Beweis vom Zwischenwertsatz: Wir nehmen an, dass für ein $u \in (\inf(f), \sup(f))$ kein $x \in X$ mit $f(x) = u$ existiert.
Dann ist das Bild von X nicht zusammenhängend (weil $u \notin f(X)$ liegt; $(-\infty, u) \cap f(X)$ und $f(X) \cap (u, \infty)$ bilden eine Zerlegung).
Das widerspricht Satz 14. $\square$

Abschlüsse von zusammenhängenden Mengen sind zusammenhängend

Def. Sei (X, d) ein metrische Raum.
Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn der metrische Raum $(A, \text{induzierte Metrik})$ zusammenhängend ist.
Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt wegzusammenhängend, wenn der metrische Raum $(A, \text{induzierte Mertik})$ wegzusammenhängend ist.

Satz 18. Sei (X, d) ein metrische Raum und $A \subseteq X$ eine zusammenhängende Menge. Dann ist auch $\bar{A}$ zusammenhängend.

Widerspruchsbeweis. Angenommen, $\bar{A}$ ist nicht zusammenhängend, also $\bar{A} = U \cup V$ sei die disjunkte Zerlegung von $\bar{A}$ in zwei nichttriviale, offene (in Sinne von $\bar{A}$) Mengen. Wir betrachten $U' = U \cap A$ und $V' = V \cap A$. Sie sind disjunkt und $U' \cup V' = A$. Sie sind offen (in A) nach Satz 15. Um also einen Widerspruch zum Zusammenhängendsein von A zu bekommen, muss man nur zeigen, dass die Zerlegung nichttrivial ist ($=$ keine der Mengen U', V' ist leer); wir machen es auf der nächsten Seite.

Wir haben also Zerlegung von A in zwei nichttrivialen offenen Mengen konstruiert, was ein Widerspruch zum Zusammenhängendsein von A darstellt. Satz 18 ist damit bewiesen.

Beweis, dass $U' = U \cap A \neq \varnothing$

Sei $u \in U$. Ist $u \in A$, dann ist $u \in U'$ wie wir es wollen, also sei $u \in \bar{A} \backslash A$.

Nach Satz 9 existiert eine Folge von Punkten in A, die gegen u konvergiert.

> **Satz 9.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Abschluss $\bar{A}$ einer Teilmenge A besteht aus allen Grenzwerten von in X konvergierenden Folgen mit Elementen in A.

Sei $r > 0$ ein Radius, sodass $B_r^{\bar{A}}(u) \subseteq U$ (existiert, weil U offen in $\bar{A}$ ist). Dann liegen einige Elementen von a_k in $B_r^{\bar{A}}(u)$ (sogar alle ab irgendeiner Zahl N), und deswegen auch in U. $\square$