Zusammenhangskomponenten

Satz 19. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A_i, i \in \mathcal{I}$ eine (beliebige) Familie von zusammenhängenden Teilmengen sodass $\forall\ i, j \in \mathcal{I}$ gilt $A_i \cap A_j \neq \varnothing$.
Dann ist auch $A := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ zusammenhängend.

Widerspruchsbeweis. Angenommen, A ist nicht zusammenhängend. Also existiert eine nichttriviale disjunkte offene Zerlegung $A = U \cup V$. Sei $p \in U$ und $q \in V$.
Sei $p \in A_i$ und $q \in A_j$. Dann ist $A_i \cap V = \varnothing$. (Andernfalls bilden $A_i \cap U$ und $A_i \cap V$ eine disjunkte offene Zerlegung von A_i, denn $A_i \cap U \neq \varnothing$, weil p in beiden Mengen liegt). Also, $A_i \subseteq U$.

Analog zeigt man, dass $A_j \subseteq V$. Dann ist $A_i \cap A_j = \varnothing$, was einer der Voraussetzungen im Satz widerspricht. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Satz 18. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine zusammenhängende Menge. Dann ist auch $\bar{A}$ zusammenhängend.

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Zusammenhangskomponente eines Punktes $p \in X$ ist die Vereinigung aller zusammenhängener Mengen $A \subseteq X$, die p enthalten.

- Nach Satz 19 ist jede Zusammenhangskomponente zusammenhängend.
- Nach Satz 18 ist jede Zusammenhangskomponente abgeschlossen.

Bemerkung. Zusammenhangskomponenten sind nicht immer offen: Ein Beispiel wird auf Tafel (Whiteboard) vorgeführt (die Menge ist $\mathbb{Q}$ mit der induzierten Metrik).

Zusammenhangskomponenten als Äquivalenzklassen

Satz 19. Sei (X, d) ein metrischer Raum und A_i, $i \in \mathcal{I}$ eine (beliebige) Familie von zusammenhängenden Teilmengen sodass $\forall\ i, j \in \mathcal{I}$ gilt $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. Dann ist $A := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ zusammenhängend.

Nach Satz 19 (oder Definition von Zusammenhangskomponente) sind zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten auch disjunkt. Also haben wir eine Zerlegung von X in disjunkte Teilmengen, was uns bekantlich eine Äquivalenzrelation auf X gibt: Zwei Punkte $x, y \in X$ sind äquivalent, falls sie in der selben Zusammenhangskomponente liegen.

Diese Äquivalenzrelation kann man auch direkt, ohne Zusammenhangskomponenten einzuführen, wie folgt definieren: zwei Punkten $x, y \in X$ seien äquivalent, falls eine zusammenhängende Menge $A \subseteq X$ existiert, sodass $x, y \in A$. Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich, Transitivität folgt aus Satz 19, jedoch reicht es den Satz für nur zwei Mengen zu beweisen.