Bild eines kompakten Raums ist kompakt

Satz 21. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räumen, wobei X kompakt sei, und die Abbildung $f : X \to Y$ stetig.
Dann ist $f(X)$ (mit der von Y induzierten Metrik) auch kompakt.

Beweis. Sei $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_k = f(x_k), ...$ eine beliebige Folge von Elementen im Bild $f(X)$. Da X kompakt ist, hat die Folge $x_1, ..., x_k, ...$ eine konvergente Teilfolge $x_{k_1}, ..., x_{k_\ell}, ... \overset{\ell\to\infty}{\to} x$. Dann konvergiert (wegen Satz 12, Stetigkeit als Folgen-Stetigkeit) die Teilfolge $\ell \mapsto y_{k_\ell}$ gegen $y := f(x)$. $\square$

Bemerkung. Satz 21 zeigt, dass Kompaktheit einer Teilmenge von (X, d) eine "innere" Eigenschaft ist: Sie hängt nicht vom "Rest" von X ab. Offenheit und Abgeschlossenheit sind keine inneren Eigenschaften.

Kompaktheit ist ein topologisches Begriff

Def. Sei (X, d) ein metrische Raum. Eine (offene) Überdeckung von X ist eine Familie $U_i,\ i \in \mathcal{I}$ von (offenen) Mengen, sodass $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i = X$. Ist $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$, und ist $U_i,\ i \in \mathcal{I}'$ immer noch eine Überdeckung, so heißt $U_i,\ i \in \mathcal{I}'$ eine Teilüberdeckung.

Satz 22. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:
(X, d) ist kompakt, g.d.w. für jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung existiert.

Bemerkung. Die rechte Bedingung im Satz ist die "topologische" Definition der Kompaktheit.

Beweis in Richtung $\Longleftarrow$.

Wir nehmen an, dass die 'topologische' Kompaktheit gegeben ist: für jede offenen Überdeckung von X existiert eine endliche Teilüberdeckung. Sei x_k eine Folge. Wir betrachten die (Bild-)Menge $W := \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Ist die Menge W endlich, dann ist die Aussage, welche wir beweisen sollen, offensichtlich: die Folge x_k nimmt einen der 'Werte' w aus W unendlich oft an; die Elemente von der Folge, die gleich w sind, bilden dann eine konvergente Teilfolge. Sei also die Menge W unendlich.

Wir betrachten die folgende Überdeckung von X: die Indexmenge $\mathcal{I}$ ist W und die Teilmengen U_i sind wie folgt: $U_1 := X \setminus W$, $U_2 := U_1 \cup \{x_1\}$, $U_3 := U_2 \cup \{x_2\}$,..., $U_k = U_{k-1} \cup \{x_{k-1}\}$,... . Das ist tatsächlich eine Überdeckung: die Elemente von $X \setminus W$ sind bereits in U_1 enthalten, und das Element x_{k-1} liegt in U_k.

Wir zeigen mittels Widerspruchsbeweis, dass die Überdeckung nicht offen ist. Ist sie offen, dann kann man nach Voraussetzung eine endliche (sagen wir, aus n Elementen) Teilüberdeckung $U_{k_1}, ..., U_{k_n}$ konstruieren. Das ist aber keine Teilüberdeckung, weil die Vereinigung $U_{k_1} \cup ... \cup U_{k_n}$ nur endlich viel Elementen von W enthält (höchstens $\max(k_1, ..., k_n)$), und die Menge W unendlich ist.

Also ist eines der U_i nicht offen. Wir erinnern uns, dass $U_i = (X \setminus W) \cup \{x_1, ..., x_i\}$. Das bedeutet:

$$\exists u \in U_i \; \forall \delta > 0 \mid \; \underbrace{\exists\, x \notin U_i \;\; \text{sodass} \;\; d(u,x) < \delta}_{B_\delta(u) \not\subseteq U_i}.$$

Wir benutzen diese Quantoren-Aussage, um eine Teilfolge von x_k zu konstruieren, die gegen u konvergiert. Wir nehmen wie immer eine Folge $\delta_1 = \frac{1}{2}, \delta_2 = \frac{1}{4}, ...\delta_k = \frac{1}{2^k}, ...$ und nehmen das Element $x \notin U_i$ mit $d(u,x) < \delta_1$.Dieses Element liegt in W, also ist es x_{k_1} für ein k_1.

Als x_{k_2} nehmen wir das Element $x \notin U_i$ mit $d(u,x) < \min(\delta_2, d(x_{k_1}, u))$. (Wir bemerken, dass $x_{k_1} \notin U_i$, deswegen $d(x_{k_1}, u) > 0$.)

Als x_{k_ℓ} nehmen wir das $x \notin U_i$ mit $d(u,x) < \min(\delta_\ell, d(x_{k_{\ell-1}}, u))$.

Die Folge x_k konvergiert, weil die Folge δ_k gegen 0 konvergiert. Alle Elemente der Folge sind verschieden nach Konstruktion, deswegen sind auch die Zahlen $k_1, k_2, ..., k_\ell, ...$ verschieden.
Diese Zahlen sind nicht monoton wachsend angeordnet, sodass k_ℓ ist nicht unbedingt eine Teilfolge ist. Wenn wir sie aber monoton umordnen, wird sie immer noch gegen u konvergieren. Damit ist die Richtung $\Longleftarrow$ gezeigt.