Cauchy-Folgen und Vollständigkeit

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und x_k eine Folge.
Sie heißt Cauchy-Folge (in der Analysis-Literatur heißt sie auch Fundamentalfolge, in der metrischen Geometrie benutzt man diesen Name jedoch eher selten), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass ab diesem Index alle Folgenglieder weniger als ε voneinander entfernt sind:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N: \qquad d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Bsp. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge, denn für eine konvergente Folge $x_k \overset{k\to\infty}{\to} x$ gilt:

$$\forall \tfrac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \qquad d(x, x_n) < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Aus der Dreieckungleichung folgt dann
$d(x_n, x_m) \leq d(x, x_n) + d(x, x_m) < \varepsilon$.

Def. Ein vollständiger metrischer Raum ist ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge von Elementen des Raums konvergiert.

Beispiele

Bsp. Aus dem Satz 26 wird folgen, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist. Es ist einfach zu zeigen, dass das Produkt von zwei metrischen Räumen $X \times Y$ genau dann vollständig ist, wenn die beide Räume vollständig sind.

In der Tat, wir haben bewiesen und mehrmals benutzt, dass Konvergenz der Folge $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \in X \times Y$ gegen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz $x_k \overset{k\to\infty}{\to} x$, $y_k \overset{k\to\infty}{\to} y$ ist. Außerdem kann man einfach zeigen, dass die Folge $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \in X \times Y$ g.d.w. Cauchy ist, wenn $x_k \in X$ und $y_k \in Y$ beide Cauchy sind. Also ist $\mathbb{R}^n$ vollständig.

Bsp. $\mathbb{R}^n$ ohne einen Punkt (z.B. ohne den Punkt $\vec{0}$) ist nicht vollständig, denn die Folge $\begin{pmatrix} 2^{-k} \\ 0 \end{pmatrix}$ (in $\mathbb{R}^2$) ist eine Cauchy-Folge, konvergiert aber nicht, weil wir den Punkt $\vec{0}$ rausgeworfen haben.

Vollständigkeit ist kein topologischer Begriff

Bsp. Das offene Intervall $(-1,1)$ und die ganze reelle Gerade $\mathbb{R}$ sind homöomorph: das bedeutet, es existiert eine Bijektion $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, die stetig ist, und deren Umkehrabbildung $f^{-1}:\mathbb{R}\to(-1,1)$ auch stetig ist.
In Fall von $(-1,1)$ und $\mathbb{R}$ kann man eine solche Bijektion explizit angeben: $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Da f stetig ist, ist das Urbild jeder in $\mathbb{R}$ offenen Menge offen in $(-1,1)$. Da f^{-1} stetig ist, ist auch das Bild von jeder in $(-1,1)$ offene Menge offen in $\mathbb{R}$. Wenn wir also die Punkte von $(-1,1)$ und die Punkte von $\mathbb{R}$ mit Hilfe von f identifizieren, so sind die Topologien einfach gleich.

Der Raum $\mathbb{R}$ ist vollständig, aber der Raum $(-1,1)$ ist es nicht.

Kompakta sind vollständig

Satz 26. Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Beweis. Sei x_k eine Cauchy-Folge im kompakten (X, d). Das heißt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N_1 : \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Wir betrachten eine konvergente Teilfolge $x_{k_\ell} \overset{\ell \to \infty}{\to} x$ (sie existiert, weil X kompakt ist), und zeigen, dass die ganze Folge gegen x konvergiert.

Da die Teilfolge konvergiert, haben wir

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 : \quad d(x_{k_n}, x) < \varepsilon.$$

Wenn wir berücksichtigen, dass $k_n \geq n$, sowie die Dreiecksungleichung $d(x_n, x) \leq d(x_{k_n}, x_n) + d(x_{k_n}, x)$, bekommen wir, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ für } N := \max(N_1, N_2) \; \forall n > N \; d(x_n, x) < 2\varepsilon,$$

woraus Konvergenz folgt. $\square$

$\mathbb{R}$ ist vollständig

Satz 26. Jeder kompakte metrischer Raum ist vollständig.

Folgerung. $\mathbb{R}$ mit der Standard-Metrik ist vollständig.
Deswegen ist auch $\mathbb{R}^n$ vollständig (als Produkt von vollständigen Räumen).

Beweis. Sei $x_k \in \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge. Dann ist sie beschränkt: es gibt ein $R > 0$ sodass alle Elemente x_k der Folge im Ball $B_R(0)$ liegen. Denn für $\varepsilon = 1$ existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass $\forall n, m \geq N \quad d(x_n, x_m) < 1$. Dann kann man als R die folgende Zahl nehmen:

$$R = \max(d(x_1, 0), d(x_2, 0), ..., d(x_N, 0)) + 1.$$

Alle Elemente der Folge liegen im R-Ball um 0. In der Tat, für die Elemente bis zum Element Nummer N ist es offensichtlich nach Konstruktion von R. Für die Elemente x_n mit $n > N$ folgt es aus der Dreiecksungleichung:

$$d(x_n, 0) \leq \underbrace{d(x_n, x_N)}_{<1} + \underbrace{d(x_N, 0)}_{\leq R-1}.$$

Also liegen alle Punkten der Folge innerhalb des Intervalls $[-R, R]$. Wir haben aber bewiesen, dass ein Intervall kompakt ist. Dann ist es auch vollständig nach Satz 26, deswegen konvergiert die Folge x_k. $\square$

(C^0, d_∞) ist vollständig

Bsp. (X, d_X) und (Y, d_Y) seien kompakt; wir betrachten den metrischen Raum $C^0(X, Y)$ von stetigen Abbildungen von X nach Y mit der Metrik

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

Dann gilt: $(C^0(X, Y), d)$ ist vollständig.

Bemerkung. Im Fall $X = Y = [0, 1]$ hatten wir mehrere Metriken auf C^0 eingeführt: d_1, d_2, d_∞. Die Metrik d oben ist d_∞.
Die andere zwei Metriken d_2 und d_1 benötigen das Integrieren und deswegen kann man sie nicht für beliebige metrische Räume definieren.

Beweis, dass $(C^0(X,Y), d)$ vollständig ist

Sei $f_k \in C^0(X,Y)$ eine Cauchy-Folge von Funktionen. Plan des Beweises:

- Zuerst konstruieren wir eine Funktion $f : X \to Y$, welche der Grenzwert der Folge f_k sein soll. Aus der Konstruktion wird klar, dass $d(f_k, f) \stackrel{k\to\infty}{\to} 0$.
- Dann zeigen wir, dass f auch stetig ist, also in $C^0(X,Y)$ liegt.

Sei $x_0 \in X$. Wir betrachten die Folge $y_k := f_k(x_0) \in Y$.
Sie ist eine Cauchy-Folge, denn

$$d_Y(y_n, y_m) = d_Y(f_n(x_0), f_m(x_0)) \le \sup_{x\in X} \left(d_Y(f_n(x), f_m(x))\right) = d(f_n, f_m).$$

Wenn also n, m groß genug sind (beide $\ge N$), dann ist $d_Y(y_n, y_m)$ klein genug ($< \varepsilon$). Wir bemerken, dass man die Zahl $N = N(\varepsilon)$ unabhängig von x_0 wählen kann.

Dann konvergiert (y_k) wegen Satz 26, sei y_0 Grenzwert. Wir setzen $f(x_0) := y_0$. Wir haben also jedem Punkt $x_0 \in X$ den Wert $y_0 \in Y$ eindeutig zugewiesen; die Abbildung f ist damit konstruiert.

Wie oben erklärt gilt ab einem N, dass $\forall x \; d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$, also $\forall x \; d(f(x), f_n(x)) \le \varepsilon$. Das bedeutet $\sup_{x\in X} d_Y(f(x), f_n(x)) \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$.
Falls also f stetig ist, konvergiert f_k in der Metrik d gegen f.

Warum f stetig ist

Wir benutzen die Folgen-Stetigkeit (Satz 12): Sei $x_k \overset{k\to\infty}{\to} x$ eine konvergente Folge in X. Dann gilt für n groß genug $d(f(x_k), f_n(x_k)) < \frac{\varepsilon}{3}$ (unabhängig von k, wie auf der vorherigen Seite besprochen wurde) und $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Für ein festes n und für k groß genug bekommen wir wegen Stetigkeit von f_n, dass $d(f_n(x_k), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$.
Die Dreiecksungleichung angewendet auf diese drei Ungleichungen gibt uns

$$d(f(x_k), f(x)) \leq d(f_n(x_k), f(x_k)) + d(f_n(x), f(x)) + d(f_n(x_k), f_n(x)) < \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass die Folge $f(x_k)$ gegen $f(x)$ konvergiert; deswegen ist f stetig und die Vollständigkeit von C^0 bewiesen. $\square$