Weitere Anwendungen von Kompaktheit

Def. (X, d_X) und (Y, d_Y) seien metrische Räume. Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ heißt Homöomorphismus, wenn sie und auch ihre Umkehrabbildung f^{-1} stetig sind.

Bemerkung. Wir haben das Wort "homöomorph" bereits benutzt, in der Woche 5; weil sowohl f als auch f^{-1} stetig sind, sind sowohl Urbilder von offenen Mengen (in Y) offen (in X), als auch Bilder von offenen Mengen offen; die Mengen X und Y haben dann (nach der Identifizierung mittels f) die gleiche Topologie.

Satz 27. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sodass X kompakt ist. Sei $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f ein Homöomorphismus.

In Worten. Jede stetige, injektive Abbildung auf einem Kompaktum ist ein Homöomorphismus in ihr Bild.

Bemerkung. Beispiele von stetigen bijektiven nichthömeomorphen Abbildungen werden auf der Tafel (Whiteboard) gegeben.
Einfaches Beispiel: Abbildung

$$f : [0, 1) \to S^1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}, \; f(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Beweis von Satz 27.

Satz 27. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sodass X kompakt ist. Sei $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f ein Homöomorphismus.

Die Abbildung f ist bereits stetig und bijektiv, also müssen wir nur Stetigkeit von f^{-1} zeigen. Wir benutzen die 'topologische' Definition der Stetigkeit (Satz 13):
Wir müssen zeigen, dass das Urbild, bezüglich f^{-1} einer jeden offenen Mengen (in X) auch offen (in Y) ist. D.h., wir müssen zeigen, dass für jede offene Menge U in X die Menge $f(X)$ auch offen ist. Da das Bilden von Bild/Urbild und das Komplementbilden vertauschbare Operationen sind, können wir äquivalent die folgende Aussage zeigen:
Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ ist $f(A)$ abgeschlossen.
Das folgt aber aus den Sätzen 20 und 21:
Nach Satz 20 ist $A \subseteq X$ kompakt. Nach Satz 21 ist deswegen das Bild $f(A)$ auch kompakt. Dann ist $f(A)$ auch abgeschlossen nach Satz 20. Damit ist Satz 27 bewiesen. $\square$