Vervollständigung eines metrischen Raumes

Satz 29. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und eine isometrische Abbildung $\phi : X \to \tilde{X}$ sodass das Bild von X dicht in $\tilde{X}$ ist. Ferner gilt: dieser Raum $\tilde{X}$ ist eindeutig bis auf Isometrie.

Bemerkungen.

1. Ich habe nocht nicht den Begriff "isometrische Abbildung" definiert, mache ich jetzt. Die Definition ist sehr natürlich: Es soll $d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gelten. Offensichtlich ist jede isometrische Abbildung injektiv. Eine bijektive isometrische Abbildung heißt Isometrie
2. In Symbolen sieht die Bedingung "Bild von X ist dicht in $\tilde{X}$ " wie folgt aus: $\overline{\phi(X)} = \tilde{X}$.

Plan des Beweises.

- Zuerst konstruieren wir einen Raum $\hat{X}$ mit einer pseudo-Metrik $\hat{d}$. Eine **pseudo-Metrik** ist eine Funktion $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}$, welche symmetrisch ist, die Dreieckungleichung erfüllt, aber nicht unbedingt definit ist, d.h. es kann $d(x, y) = 0$ gelten mit $x \neq y$.
- Man kann aus der pseudo-Metrik auf dem Raum $\hat{X}$ einen metrischen Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ konstruieren kann, ich wiederhole bzw. erzähle die Konstruktion.
- Wir zeigen dann, dass $(\tilde{X}, \tilde{d})$ vollständig ist.
- Danach sollten wir auch Eindeutigkeit (bis auf Isometrien) solcher "Vervollständigungen" $(\tilde{X}, \tilde{d})$ zeigen.

Pseudometrik

Def. Ein Pseudo-Metrischer Raum besteht aus einer nichtleeren Menge X und aus einer Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

- ~~$\forall\, x, y \in X$ gilt: $d(x,y) = 0 \iff x = y$.~~
  $\forall\, x \in X$ gilt: $d(x,x) = 0$.
- $\forall\, x, y \in X$ gilt: $d(x,y) = d(y,x)$.
- $\forall\, x, y, z \in X$ gilt: $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

Sei (X, d) ein metrische Raum. Wir konstruieren den Pseudo-Metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ wie folgt:

- die Elemente von $\hat{X}$ seien die Cauchy-Folgen von Elementen von X.
- Wir definieren die pseudo-Metrik $\hat{d}$ auf $\hat{X}$ wie folgt: für zwei Cauchy-Folgen x_k und y_k setzen wir

  $$\hat{d}(x_k, y_k) := \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k)$$

  (auf der linken Seite steht Abstand in $(\hat{X}, \hat{d})$ von zwei Elementen von $\hat{X}$, auf der rechten Seite steht Grenzwert von Zahlenfolge $k \mapsto d(x_k, y_k)$).

$\hat{d}(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k)$

Diese Formel definiert tatsächlich eine (reelwertige) Funktion auf $\hat{X} \times \hat{X}$ sodass sie die Eigenschaften der pseudo-Metrik erfüllt: wir erklären das. Um zu zeigen, dass die Funktion für allen Cauchy-Folgen x_k und y_k definiert ist, müssen wir zeigen, dass die Folge $k \mapsto d(x_k, y_k)$ konvergiert. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, reicht es, wenn wir zeigen, dass die Folge $k \mapsto d(x_k, y_k)$ eine Cauchy-Folge ist; und das folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$d(x_k, y_k) \leq d(x_k, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_k)$$

$$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_k) + d(x_k, y_k) + d(y_k, y_m).$$

In diesen beiden Ungleichungen sind die orange Termen "klein" für grosse k, m; deswegen ist auch $|d(x_k, y_k) - d(y_m, y_m)|$ "klein", und die Folge $k \mapsto d(x_k, y_k)$ ist eine Cauchy-Folge und konvergiert deswegen.

Also ist die Abbildung $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}$ wohldefiniert. Wir müssen noch zeigen, dass sie die zwei Eigenschaften einer pseudo-Metrik hat.

$\hat{d}(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k)$

- Symmetrie ist offensichtlich: $\hat{d}(x_k, y_k) = \hat{d}(y_k, x_k)$.
- Dreiecksungleichung: wir müssen zeigen, dass $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, y_k) + \lim\limits_{k\to\infty} d(y_k, z_k) \geq \lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, z_k)$.
  Weil der Grenzwert einer Summe die Summe der Grenzwerte ist, ist die Gleichung äquivalent zu:
  $$\lim_{k\to\infty} (d(x_k, y_k) + d(y_k, z_k) - d(x_k, z_k)) \geq 0.$$
  Das ist aber offensichtlich, weil für jedes k die Zahl $d(x_k, y_k) + d(y_k, z_k) - d(x_k, z_k)$ nach Dreiecksungleichung für d positiv ist.

Jetzt konstruieren wir mit Hilfe des pseudo-metrischen Raumes $(\hat{X}, \hat{d})$ einen metrischen Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$.

Die Elemente von $\tilde{X}$ sind die Äquivalenzklassen von $\hat{X}$ bezüglich folgender Äquivalenzrelation: $x_k \sim y_k$, wenn $\hat{d}(x_k, y_k) = 0$.

Die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation sind einfach zu überprüfen. Die Menge $\tilde{X}$ sei die Menge von Äquivalenzklassen, also $\tilde{X} = \hat{X}/_{\sim}$.
Als Metrik $\tilde{d}$ zwischen zwei Äquivalenzklassen $[x_k]$ und $[y_k]$ nehmen wir $\hat{d}(x_k, y_k)$. Diese Zahl hängt nicht von der Wahl von Repräsentanten in der Äquivalenzklasse ab, denn ist $[x_k] = [x'_k]$, so ist $\tilde{d}([x'_k], [y_k]) = \hat{d}(x'_k, y_k) \leq \underbrace{\hat{d}(x'_k, x_k)}_{=0} + \hat{d}(x_k, y_k) = \tilde{d}([x_k], [y_k])$

und analog $\tilde{d}([x_k], [y_k]) \leq \tilde{d}([x'_k], [y_k])$.

Fassen wir die beide vorherigen Konstruktionen zusammen:

Die Elementen von $\tilde{X}$ sind Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen von Elementen von X; zwei Cauchy-Folgen x_k, y_k sind äquivalent, wenn $\lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k) = 0$.
Der $\tilde{d}$-Abstand zwischen zwei Äquivalenzklassen $[x_k]$ und $[y_k]$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, y_k)$. Er hängt nicht von Wahl von Repräsentanten aus der Äquivalenzklasse ab und hat die Eigenschaften einer Metrik.

Satz 29. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und eine isometrische Abbildung $\phi : X \to \tilde{X}$ sodass das Bild von X dicht in $\tilde{X}$ ist.
Ferner gilt: dieser Raum $\tilde{X}$ ist eindeutig bis auf Isometrie.

Den (Kandidat für den) Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ haben wir konstruiert; es bleibt noch zu zeigen, dass $\tilde{X}$ vollständig ist, und was die isometrische Abbildung $\phi : X \to \tilde{X}$ ist, deren Bild dicht in $\tilde{X}$ ist. Wir fangen an mit der zweiten Aufgabe.
Das Element $x \in X$ wird auf der Äquivalenzklasse der konstanten Folge $x_1 = x, x_2 = x, ..., x_k = x, ...$ abgebildet. Sie ist selbstverständlich eine Cauchy-Folge. Diese Abbildung ϕ erhält offensichtlich die Metrik, denn für die konstanten Folgen $x_k = x$ und $y_k = y$ gilt

$$\tilde{d}(x_k, y_k) := \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} d(x, y) = d(x, y).$$

Die Bildmenge ist offensichtlich dicht in $\tilde{X}$: für die Äquivalenzklasse der Cauchy-Folge x_k konvergiert die Folge $\phi(x_1), \phi(x_2), ..., \phi(x_m), ...$ der Elementen in der Bild-Menge gegen x_k, denn $\tilde{d}(\phi(x_m), x_k) = \lim_{k \to \infty} d(x_m, x_k)$ und ist klein für m groß genug.
Andererseits heißt das, dass für jede Cauchy-Folge x_k in X ihre Bildfolge $\phi(x_k)$ konvergiert, nämlich gegen die Äquivalenzklasse von x_k.

Das Bild von X ist dicht in $\tilde{X}$

Das haben wir praktisch auf der vorherigen Seite gezeigt: für jedes Element von $\tilde{X}$, also für jede Äquivalenzklasse einer Cauchy-Folge $x_k \in X$, konvergiert die Folge $\phi(x_1), \phi(x_2), ..., \phi(x_m), ...$ gegen dieses Element.

Der Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ist vollständig.

Wir haben auf der vorletzten Folie gezeigt, dass jede Cauchy-Folge mit Elementen in $\phi(X)$ konvergiert. Wir müssen aber ein bisschen mehr zeigen: wir müssen zeigen, dass jede Cauchy-Folge mit Elementen in $\tilde{X}$ konvergiert.

Um das zu zeigen, betrachten wir eine Cauchy-Folge mit Elementen in $\tilde{X}$: $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_k, ...$ (jedes $\tilde{x}_i$ ist eine Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen).
Da das Bild $\phi(X)$ dicht in $\tilde{X}$ ist, kann man für jedes k einen Punkt $y_k \in X$ finden sodass $\tilde{d}(\phi(y_k), \tilde{x}_k) < 2^{-k}$. Die Folge $\phi(y_k)$ ist immer noch Cauchy; sie konvergiert gegen die Äquivalenzklasse der Cauchy-Folge y_k, wie wir es auf der vorletzten Folie bewiesen haben.
Die Folge $\tilde{x}_k$ konvergiert dann auch gegen den gleichen Grenzwert.

Ferner gilt: der Raum $\tilde{X}$ ist eindeutig bis auf Isometrie.

Der letzte Schritt des Beweises ist die Eindeutigkeit:
Sei $(\tilde{X}, \tilde{d})$ die konstruierte Vervollständigung mit isometrischer Abbildung ϕ und $(\tilde{X}', \tilde{d}')$ eine andere Vervollständigung mit isometrischer Abbildung ϕ'.

Wir definieren die Abbildung $f : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ wie folgt:

$$f([x_k]) := \lim_{k \to \infty} \phi'(x_k).$$

Der Grenzwert existiert, weil x_k und damit $\phi'(x_k)$ eine Cauchy-Folge ist, und hängt nicht von der Wahl eines Repräsentanten x_k in der Äquivalenzklasse ab.
Die Abbildung f ist isometrisch, weil sie auf einer dichten Teilmenge isometrisch ist. Außerdem ist $f \circ \phi = \phi'$. $\square$