

# Banachscher Fixpunktsatz (Banach, 1892-1945 polnische (österreichische? ukrainsche?) Mathematiker)

**Def.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Kontraktion mit Kontraktionszahl  $c < 1$  ist eine  $c$ -Lipschitz Abbildung von  $X$  nach  $X$ .

(d.h.  $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$ ). Selbstverständlich ist  $c > 0$  (falls  $X$  aus mehr als einem Punkt besteht).

**Satz 30.** Gegeben sei ein vollständiger metrischer Raum  $(X, d)$ . Sei  $f: X \rightarrow X$  eine Kontraktion mit Kontraktionszahl  $c \in [0, 1)$ .

Dann existiert genau ein  $x_0 \in X$  sodass  $f(x_0) = x_0$ . Ferner gilt: für jeden  $x \in X$  konvergiert die Folge  $x_k := \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ mal}}(x)$  gegen  $x_0$ .

**Beweis.** Satz ist einfach, aber so wichtig dass man ihn "Satz" nennt. Deswegen kommt die Aussage in mehreren Kursen, und ich werde ein youtube video

<https://www.youtube.com/watch?v=FSBiBrCBR4Y> mit dem Beweis zeigen (im Video heisst " $f$ " " $T$ ").