Anwendungen des Fixpunktsatzes

- Plan der meisten Anwendungen:
  - Wir formulieren die ursprüngliche Aufgabe als eine Aufgabe, den Fixpunkt einer Kontraktion in einem vollständigen metrischen Raum zu finden.
  - Die Schwierigkeit ist dabei, die richtige Umformulierung zu finden, zu zeigen, dass die konstruierte Abbildung eine Kontraktion ist und dass der Raum vollständig ist.
  - Danach lösen wir die Aufgabe approximativ (d.h. indem wir mit einem beliebigen Punkt x_0 anfangen, und zeigen, dass die Punkte $f(x_0), f \circ f(x_0), ... \overset{k\to\infty}{\to}$ Lösung); oder wir beweisen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.
- Die metrische Räumen werden zuerst Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sein; danach gehen wir in Funktionenräume.
- Ab und zu müssen wir unseren Fixpunktsatz verändern: oft wird z.B. nur die Bedienung $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ (für $x \neq y$) erfüllt sein; für die Eindeutigkeit der Lösung reicht dies, aber um zu zeigen, dass die Folge $f(x_0), f \circ f(x_0), ...$ konvergiert, müssen wir noch zusätzliche Arbeit investieren.

Nullstellen der Gleichung $\cos(x) = 2x$

Aus dem Graphen der Funktionen $y = \cos(x)$ und $y = 2x$ sieht man, dass es genau eine Lösung existiert. Lassen Sie uns diese Lösung approximativ finden.

Wir formulieren die ursprüngliche Aufgabe als eine Aufgabe, den Fixpunkt einer Kontraktion in einem vollständigen metrischen Raum zu finden.

Dieser Teil der Aufgabe ist klar: wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}\cos(x).$$

Diese Abbildung ist eine Kontraktion mit $C = \frac{1}{2}$, weil der Betrag der Ableitung von $\frac{1}{2}\cos(x)$ nicht großer als $\frac{1}{2}$ ist, folglich ist

$$d(f(x_1), f(x_2)) = |f(x_2) - f(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f'(t)dt \right| \leq \frac{1}{2}|x_2 - x_1| = \frac{1}{2}d(x_1, x_2).$$

Wenn wir also mit einen beliebigen $x_0 \in \mathbb{R}$ anfangen, konvergiert die Folge $f(x_0) = \frac{1}{2}\cos(x_0)$, $f \circ f(x_0) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\cos(x_0)\right), \ldots$ wegen des Fixpunktsatzes mit $c = \frac{1}{2}$ gegen die eindeutige Lösung.

Bemerkung. $\mathbb{R}$ ist vollständig.