Für die Gleichung $\cos(x) = x$ ist die Abbildung eventuell keine Kontraktion mehr

In der Tat, die Ableitung unserer Funktion $f(x) = \cos(x)$ ist durch $\cos'(x) = -\sin(x)$ gegeben und ist leider in einigen Punken gleich ± 1. Deswegen gibt uns die Ungleichungskette der letzten Folie nur die Bedienung $d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(x_1, x_2)$, wir wiederholen es:

$$d(\cos(x_1), \cos(x_2)) = \left| \int_{x_1}^{x_2} -\sin(t)dt \right| \leq d(x_1, x_2).$$

Wir sehen aber, dass für $x_1 \neq x_2$ immer $\left| \int_{x_1}^{x_2} -\sin(t)dt \right|$ echt kleiner als $|x_2 - x_1|$ ist, denn jedes nichttriviale Intervall hat ein Teilintervall in welchem $|\sin(x)| < 1$ gilt.

Also ist die Abbildung $f(x) = \cos(x)$ nur "fast" eine Kontraktion: $d(\cos(x_1), \cos(x_2)) < d(x_1, x_2)$ für $x_1 \neq x_2$, es gibt aber leider keine, von x_1 und x_2 unabhängige, Konstante $C < 1$ mit $d(\cos(x_1), \cos(x_2)) \leq Cd(x_1, x_2)$.

Die Frage, die wir auf der nächsten Folien positiv beantworten werden, ist dann:
Wenn wir mit beliebigem $x_0 \in \mathbb{R}$ anfangen, konvergiert dann die Folge $f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), ...$? Wenn Ja, ist der Grenzwert ein Fixpunkt und hängt er von dem Startpunkt x_0 ab?

In der Antwort wird es wichtig sein, dass das Bild der Funktion cos gleich dem Interval $[-1, 1]$ und deswegen kompakt ist. Wir können deswegen - ab der zweiten Iteration - annehmen, dass unsere Abbildung (die "fast Kontraktion" $x \mapsto \cos(x)$) eine Abbildung von einem Kompaktum in sich selber ist.

Satz 31. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und die Abbildung $f : X \to X$ erfülle $d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2)$ für alle $x_1 \neq x_2 \in X$. Dann existiert genau ein Fixpunkt, und dieser Fixpunkt ist Grenzwert der Folge $f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), ...$, wobei x_0 ein belibiger Punkt ist.

Beweis. Die Abbildung f ist 1-Lipschitz und deswegen stetig. Dann ist auch die Abbildung $D : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto d(x, f(x))$ stetig: selbstverständlich kann man es direkt zeigen. Ich werde auf der nächsten Folie einen anderen Beweis zeigen, welcher aus einer zuvor bewiesenen Aussage (Folgerung aus Satz 12 der Vorl. 7) folgt.

Zuvor bewiesenen Aussage (Folg. aus Satz 12):
Die Verkettung von stetigen Abbildungen ist stetig.

Die Abbildung $D : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto d(x, f(x))$ ist stetig

Die Abbildung $x \mapsto d(x, f(x))$ ist eine Abbildung von X nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$, und ist eine Verkettung von zwei Abbildungen:

- Die erste Abbildung F von X nach $X \times X$ ist gegeben durch $F(x) = (x, f(x)) \in X \times X$. Ihre Stetigkeit ist klar und wurde auch in der Vorl. 3 (siehe die Seite 10) besprochen; man benutzt die Folgen-Stetigkeitsmethode (Satz 12).
- Die zweite Abbildung G ist eine Abbildung von $X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch $G(x_1, x_2) = d(x_1, x_2)$, Stetigkeit ist offensichtlich und kann auch mit der Folgen-Stetigkeitsmethode sofort bewiesen werden.

Nach Konstruktion von F und G, ist $D = G \circ F$ und ist deswegen stetig als Verkettung von zwei stetigen Abbildungen.

Satz 31. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und die Abbildung $f : X \to X$ erfülle $d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2)$ für alle $x_1 \neq x_2 \in X$. Dann existiert genau ein Fixpunkt, und dieser Fixpunkt ist Grenzwert der Folge $f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots$, wobei x_0 ein belibiger Punkt ist.

Weil die Abbildung D mit $D(x) = d(x, f(x))$ stetig ist und X kompakt ist, nimmt sie ihr Minimum in irgendeinem Punkt x_{min} an, das heißt

$$D(x_{\mathrm{min}}) = \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und für alle Punkte } x \in X \text{ gilt } D(x) \geq \alpha.$$

Wir zeigen, dass $f(x_{min}) = x_{min}$. Ansonsten wäre

$$D(f(x_{\mathrm{min}})) = d(f(x_{\mathrm{min}}), f(f(x_{\mathrm{min}})) < d(x_{min}, f(x_{min})) = \alpha,$$

weil $d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2)$ für $x_1 \neq x_2$. Wir bekommen einen Widerspruch, da α das Minimum von f war. Also $f(x_{min}) = x_{min}$.

Jetzt zeigen wir noch die Eindeutigkeit: seien $x_1 \neq x_2$ zwei verschiedene Fixpunkte: $f(x_1) = x_1$ und $f(x_2) = x_2$. Dann gibt uns die Ungleichung $d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2)$ direkt einen Widerspruch.

Beweis der letzten Aussage des Satzes 31

Satz 31. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und die Abbildung $f : X \to X$ erfülle $d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2)$ für alle $x_1 \neq x_2 \in X$. Dann existiert genau ein Fixpunkt, und dieser Fixpunkt ist Grenzwert der Folge $f(x_0), f(f(x_0)), \ldots$, wobei x_0 ein belibiger Punkt ist.

Sei x der (eindeutige) Fixpunkt der Abbildung f. Wir betrachten die Folge $f(x_0), f(f(x_0)), \ldots \in X$ und dazu die Folge der Abstände der Folgenglieder zum Fixpunkt, also

$$y_1 = d(f(x_0), x), \quad y_2 = d(f(f(x_0)), x), \quad \ldots$$

Die y_i sind reelle nichtnegativen Zahlen und streng fallend, denn für ein beliebiges $\bar{x} \in X$ gilt $d(f(\bar{x}), x) = d(f(\bar{x}), f(x)) < d(\bar{x}, x)$. Da sie von unten beschränkt sind (weil positiv), konvergieren sie: sei y der Grenzwert. Wir müssen zeigen, dass $y = 0$.

Ist $y \neq 0$, so konvergiert eine Teilfolge $x_{k_\ell} \overset{\ell \to \infty}{\to} \bar{x}$ der Folge $x_1 = f(x_0), x_2 = f(f(x_0)), \ldots$ gegen ein $\bar{x} \neq x$.
Dann ist $y = \lim_{\ell \to \infty} y_{k_\ell} = d(x, \bar{x})$, also wegen Stetigkeit $d(f(\bar{x}), f(x)) < y = d(f(\bar{x}), x) = d(f(\bar{x}), f(x))$, was einen Widerspuch gibt. Satz 31 ist bewiesen. $\square$