Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung ist eine mathematische Gleichung auf eine gesuchte Funktion von einer oder mehreren Variablen, in der auch Ableitungen dieser Funktion vorkommen. Man unterscheidet verschiedene Typen von Differentialgleichungen. Ganz grob unterteilen sie sich in die folgenden Teilgebiete: gewöhnliche Differentialgleichungen und partielle Differentialgleichungen.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung, bei der zu einer gesuchten Funktion nur Ableitungen nach genau einer Variablen auftreten. Bei einer partiellen Differentialgleichung können Ableitungen nach mehreren Variablen auftreten.

Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist viel einfacher als die Theorie der partiellen Differentialgleichungen und wir werden zuerst nur gewöhnlichen Differentialgleichungen betrachten.

Man kann eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Form

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

schreiben. Dabei ist $x \in \mathbb{R}$, $F : U \to \mathbb{R}^\ell$, wobei U ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\cdot(n+1)}$ ist. Die Bezeichnung $y^{(n)}(x)$ bedeutet n-te Ableitung von Vektorwertigen Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Die (gesuchte) Funktion $y(x)$ ist eine Vektorwertige Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^m$.

In diese Gleichung ist die Funktion F ein Teil der Daten, also "bekannt"; die (vektorwertige) Funktion $y(x)$ ist gesucht. Die Zahl m heißt oft "Dimension" (man spricht über Differentialgleichungen in Dimension etwa $m = 2$) und die Zahl n heißt Ordnung.

Man kann jede der ℓ Komponenten von F als eine einzelne Gleichung betrachten; also spricht man oft über Systemen von Differentialgleichungen.

Beispiele

Bsp. 1 $y'(x) = \cos(y(x)) + 5$:
In diesem Fall ist die gesuchte Funktion $y(x)$. Hier ist $m = 1, n = 1$ und $\ell = 1$.
Die Funktion F ist durch die folgende algebraische Formel gegeben: $F(x, y(x), y'(x)) = \cos(y(x)) + 5 - y'(x)$. Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in Dimension 1 von Ordnung 1.

Bsp 2. $\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$ ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in Dimension 2 von Ordnung 1.
In diesem Fall $\ell = 2$, $n = 1$, $m = 2$, und die Abbildung F ist gegeben durch

$$F(x, y(x), y'(x)) = \begin{pmatrix} y_1'(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) + y_1(x) \end{pmatrix}$$

Wie werden zuerst nur Differentialgleichungen von Ordnung 1 betrachten, und zwar diejenigen, die in $\underbrace{\text{Euler-Form}}_{\text{Def. kommt}}$ stehen (Leonhard Euler 1707–1783). Später, am Ende der Woche, werden wir zeigen (ein einfacher Trick wird am Ende der Vorlesung erklärt), dass Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Lösungen, welchen wir für Ordnung 1 beweisen werden, auch für alle höheren Ordnungen gültig sind.

Def. Eine (gewöhnliche) Differentialgleichung (der Ordnung 1) ist in Euler-Form, wenn man Sie in der Form $y'(x) = F(x, y(x))$ schreiben kann. Dabei ist $y(x)$ eine Vektorwertige Funktion von einer Variable. In diesem Fall ist offensichtlich $\ell = m$.

Die Beispiele auf der vorherigen Seite sind bereits in Euler-Form:

Bsp. 1 $y'(x) = \cos(y(x)) + 5$:

Bsp 2. $\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$

Nicht alle Differentialgleichungen kann man in Euler-Form schreiben; wir werden aber viel später (jedoch noch vor Weihnachten) sehen, dass dies keine zu starke Bedingung ist. Wenn wir in der nahen Zukunft über Differentialgleichungen sprechen, meinen wir gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung 1, die bereits in Euler-Form stehen.

Satz 32 (Picard-Lindelöf; Émile Picard 1856-1941)
Sei $y'(x) = F(x, y(x))$ eine Differentialgleichung. Die Funktion F sei in $[a, b] \times \mathbb{R}^m$ definiert und stetig. Die Funktion F sei $C-$Lipschitz bzgl. der Variablen y, d.h. für jedes x sei $d(F(x, y_1), F(x, y_2)) \leq Cd(y_1, y_2)$. Dann existiert zu beliebigen $x_0 \in [a, b]$ und zu beliebigen $y_0 \in \mathbb{R}^m$ eine Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ mit $y(x_0) = y_0$, welche die Differentialgleichung $y' = F(x, y)$ löst: d.h., wenn wir $y(x)$ in diese Gleichung einsetzten, bekommen wir eine korrekte Gleichung. Die Funktion y ist eindeutig.

In Worten und wenn wir die Feinheiten wie die Regularitäten der Funktion F vergessen: Es existiert genau eine Lösung einer Differentialgleichung zu gegebenen Anfangsbedingungen.

Bemerkung. Wenn man die Aussagen im Kurs "Differentialgleichungen" möglichst einfach halten will, z.B. wenn man den Kurs für Naturwissenschaftler oder Ingenieure liest, nimmt man häufig an, dass alle Fuktionen C^∞-differenzierbar sind. Die Bedingung, dass die Funktion F in y Lipschitz ist, ist dann lokal immer erfüllt, da die partielle Ableitungen lokal beschränkt sind. Existenz einer globalen (auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ definierten) Lösung findet nicht immer statt, falls die partiellen Ableitungen von F bezüglich den letzten m Variablem $y_1, ..., y_m$ nicht gleichmäßig beschränkt sind.

Beispiel. Betrachten wir die Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$. Eine Lösung kennen Sie aus der Analysis I: $y(x) = e^x$ ist eine Lösung. Weitere Lösungen sind $y(x) = Ce^x$ für beliebige Konstanten C. Es ist einfach zu sehen, dass es für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ und für beliebigen $y_0 \in \mathbb{R}$ ein C gibt, sodass $Ce^{x_0} = y_0$. Auch die Eindeutigkeitsaussage kann man in diesem Beispiel zeigen, jedoch wird sie nicht immer in der Analysis I vorgetragen.

Beispiel. Betrachten wir die Differentialgleichung $y'(x) = -y^2(x)$. Die Funktionen $y(x) = \frac{1}{x - \mathrm{const}}$ sind die Lösungen. Sie sind aber für $\mathrm{const} \in (a, b)$ nicht auf dem ganzen Intervall (a, b) definiert. Wir sehen, dass die Funktion $y \mapsto y^2$ nicht Lipschitz ist und die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf verletzt, die wir für die Existenz globaler Lösungen brauchen. Dies ist also kein Gegenbeispiel zum Satz 32.

Idee des Beweises

Mit Hilfe von x_0, y_0, F konstruieren wir eine Kontraktion $f : C^0([a,b];\mathbb{R}^m) \to C^0([a,b];\mathbb{R}^m)$, deren Fixpunkte genau die Lösungen unseren Differentialgleichung $y' = F(x,y)$ mit Anfangsbedingungen x_0, y_0 sind. Da $C^0([a,b];\mathbb{R}^m)$ vollständig ist, gibt uns der Fixpunktsatz die Existenz und auch die Eindeutigkeit der Lösung.

Bemerkung. Ich habe vorher die Vollständigkeit von $C^0(X,Y)$ bewiesen unter der Annahme, dass X und Y kompakt sind, siehe Vorl. 5. Jetzt ist $X = [a,b]$ kompakt, aber $Y = \mathbb{R}^m$ nicht. Da im $\mathbb{R}^m$ jeder abgeschlossenen Ball kompakt ist, kann man den Beweis von Vorl. 5 verallgemeinern für $Y = \mathbb{R}^m$, denn falls die Folge f_k von stetigen Funktionen von X nach Y eine Cauchy-Folge ist, dann liegen für genügend grosses N alle Elemente f_n mit $n > N$ der Folge im 1-Ball um f_N. Folglich liegen die Elemente $f_n(x)$ im Ball vom Radius $M+1$ um $\vec{0}$, wobei M der maximale Abstand von $f_N(x)$ bis $\vec{0}$ ist (existiert wegen Kompaktheit von X).

Konstruktion der Kontraktion $f : C^0([a,b],\mathbb{R}^m) \to C^0([a,b],\mathbb{R}^m)$

Gegeben sei $x_0 \in [a,b], y_0 \in \mathbb{R}^m$ und die Funktion $F(x,y)$. Wir definieren f durch die folgenden Formel: für eine Funktion $y \in C^0([a,b],\mathbb{R}^m)$

$$f(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t))dt.$$

(Das Integral ist komponentenweise zu verstehen:

$$\int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x} y_1(t)dt \\ \int_{x_0}^{x} y_2(t)dt \end{pmatrix}.)$$

$f(y)$ ist eine Funktion auf dem Intervall $[a,b]$.
Wir zeigen jetzt, dass die Abbildung f Lipschitz ist:
Seien y und $\bar{y}$ zwei Funktionen und $x \in [a,b]$. Dann gilt:

$$d(f(y)(x), f(\bar{y})(x)) = |\int_{x_0}^{x} F(t,y(t)) - F(t,\bar{y}(t))dt|$$

$$\leq C \int_{x_0}^{x} |y(t) - \bar{y}(t)|dt \leq C \cdot (b-a) \cdot d(y, \bar{y}).$$

Wenn also $C \cdot (b - a) < 1$ ist, so ist die Abbildung f eine Kontraktion. Wir konzentrieren uns zuerst auf diesen Fall und bearbeiten den allgemeinen Fall später.

Unsere Abbildung $f : C^0([a, b], \mathbb{R}^m) \to C^0([a, b], \mathbb{R}^m)$ gegeben durch

$$f(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t))dt$$

sei eine Kontraktion. Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt y der Abbildung, also eine Funktion y sodass $f(y) = y$. Dann gilt:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t))dt.$$

Wir leiten diese Gleichung nach x ab und erhalten:

$$y'(x) = F(x, y(x)),$$

also ist dieser Fixpunkt eine Lösung der Differentialgleichung und erfüllt die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.
Die Existenz einer Lösung (für $b - a$ klein genug) ist bewiesen!

Um Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen, bemerken wir, dass jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung ein Fixpunkt der Abbildung f ist, denn, falls $y'(t) = F(t, y(t))$ ist, ist

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} F(t, y(t))dt$$

wegen dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Nach dem Fixpunktsatz hat f genau einen Fixpunkt.

Was machen wir, wenn $C \cdot (b - a) \geq 1$ ist?

In diesem Fall überdecken wir das Intervall $[a, b]$ mit Intervallen $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_N, b_N]$. Die Punkte a_i, b_i seien so gewählt, dass $(b_i - a_i)C < 1$ und dass sich aufeinanderfolgende Intervalle überlappen, also $a = a_1 < a_2 < b_1 < b_2,\ a_2 < a_3 < b_2 < b_3$ u.s.w.
Dann existiert die Lösung zu beliebigen Anfangsbedinungen auf jedem Intervall, und wir "kleben" die Lösung auf dem Intervall $[a, b]$ aus der Lösungen auf den Intervallen $[a_i, b_i]$ zusammen. Ich erkläre es im Fall, wenn wir genau zwei solchen Intervallen haben, Beweis für beliebige N ist analog.
Wir haben also $a_2 < b_1$, wir betrachten die Intervalle $[a, b_1]$ und $[a_2, b]$, und wir nehmen an, dass sie klein genug sind. Sei $x_0 \in [a, b_1]$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $y_1 : [a, b_1] \to \mathbb{R}^m$ mit Anfangsbedingungen $y_1(x_0) = y_0$. Wir nehmen einen Punkt $x_1 \in (a_2, b_1)$ und betrachten $y_1(x_1)$. Es gibt eine Lösung $y_2 : [a_2, b] \to \mathbb{R}^m$ mit Anfangsbedingungen $y_2(x_1) = y_1(x_1)$. Wir definieren jetzt

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{für} \quad x \in [a, x_1] \\ y_2(x) & \text{für} \quad x \in [x_1, b] \end{cases} .$$

Die Funktion y ist eine Lösung auf dem ganzem Intervall $[a, b]$. Damit ist Existenz bewiesen. Eindeutigkeit macht man analog. Satz 32 ist bewiesen.