Trick: Reduktion von Gleichungen höherer Ordnung auf Systeme erster Ordnung

Ich erkläre das Trick unter der Annahme, dass Dimension $m = 1$. Der Beweis für beliebiges m ist analog.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right). \qquad (*)$$

Wie oben ist $y^{(n)}$ die Bezeichnung für die n-te Ableitung der Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir überführen diese Differentialgleichung mit einem Trick in ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in Euler-Form.

Wir betrachten die Funktionen $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und eine Differentialgleichung der ersten Ordnung

$$Y'(x) = F(x, Y(x)), \qquad (**)$$

wobei $F = (F_1, ..., F_n) : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist wie folgt definiert:

$$F_1(x, Y(x)) = y_1,\ F_2(x, Y(x)) = y_2,\ \ldots\ , F_{n-1}(x, Y(x)) = y_{n-1},$$

$$F_n(x, Y(x)) = f(x, Y(x)).$$

Lass uns sehen (ohne über Differenzierbarkeit und Anfangsbedingungen nachzudenken), dass es eine bijektive Korrespondenz zwischen dem Raum der Lösungen der Differentialgleichung $(*)$ und dem Raum der Lösungen der Differentialgleichung $(**)$ gibt. Sie ist durch die folgende Formel gegeben: zu jede Lösung $y(t)$ von $(*)$ ist $Y(x) = (y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))$ eine Lösung von $(**)$. Zu jede Lösung $Y(x) = (y_0(x), ..., y_{n-1}(x))$ gilt nach Konstruktion, dass $y_0(x)$ die Lösung von $(*)$ ist.

Picard-Lindelöf für Differentialgleichung von beliebiger Ordnung

Folgerung. Sei $y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))$ eine Differentialgleichung der Ordnung n. Die Funktion F sei stetig und C-Lipschitz bzgl. allen Variablen außer eventuell der Variablen x.

Dann existiert, zu beliebigen $x_0 \in [a, b]$ und zu beliebigen $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ eine Funktion $y : [a, b] \to U$ mit

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

welche die Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right)$$

löst.

Weitere Anwendungen des Fixpunktsatzes

- Plan von Anwendungen bleibt derselbe:
  - Wir formulieren die ursprüngliche Aufgabe als eine Aufgabe, den Fixpunkt einer Kontraktion in einem vollständigen metrischen Raum zu finden.
  - Die Schwierigkeit ist dabei, die richtige Umformulierung zu finden, zu zeigen, dass die konstruierte Abbildung eine Kontraktion ist und dass der Raum vollständig ist.
  - Danach lösen wir die Aufgabe approximativ (d.h. indem wir mit einem beliebigen Punkt x_0 anfangen, und zeigen, dass die Punkte $f(x_0), f \circ f(x_0), ... \overset{k\to\infty}{\to}$ Lösung); oder wir beweisen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.