Satz über implizite Funktionen, zuerst in Dimension 1

Erläuterung des Wortes "implizit": Nicht immer ist es möglich eine reelle Funktion mittels einer expliziten Zuordnungsvorschrift y=f(x) anzugeben. Ist eine Funktion durch eine Gleichung der Form $F(x, y(x)) = 0$ gegeben, so spricht man von einer impliziten Funktion. Hier kann sowohl x als auch $y(x)$ mehrdimensional sein (zuerst betrachten wir aber den eindimensionalen Fall, in dem $x \in \mathbb{R}$ und $y : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist).

Selbstverständlich ist diese Gleichung oder das Gleichungssystem $F(x, y(x)) = 0$ nicht immer eindeutig lösbar. Man soll sich also Fragen, ob die Funktion $y(x)$ wohldefiniert ist; ferner soll man noch die Regularität der Funktion $y(x)$ (ist sie stetig? differenzierbar? was ist die Ableitung?) untersuchen.

Satz 33 (Satz über implizite Funktionen in Dimension 1).
Es sei $F : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass $\frac{\partial F}{\partial y}$ (wobei $y \in \mathbb{R}$ die zweite Variable von $F(x, y)$ ist) existiert und stets zwischen positiven m und M liegt, also $0 < m \leq \frac{\partial F}{\partial y} \leq M$.

Sei $(x_0, y_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine stetige Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ sodass für jedes $x \in [a, b]$ gilt $F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)$.

In Worten: Unter der Annahme $0 < m \leq \frac{\partial F}{\partial y} \leq M$ definiert die Gleichung $F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)$ eine eindeutige stetige Funktion $y(x)$.

Beweis des Satzes 33

Als metrischen Raum betrachten wir $C^0([a,b],\mathbb{R})$; als d nehmen wir die Supremums-Metrik d_∞. Wir konstruieren die Abbildung $f : C^0([a,b],\mathbb{R}) \to C^0([a,b],\mathbb{R})$ wie folgt:

Für jede Funktion $y \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ sei

$$f(y)(x) = y(x) - \frac{1}{M}F(x, y(x)) + \frac{1}{M}F(x_0, y_0).$$

Die Funktion $f(y)$ ist offensichtlich stetig. Wir zeigen, dass die Abbildung eine Kontraktion ist.

$$\boxed{f(y)(x) = y(x) - \tfrac{1}{M}F(x, y(x)) + \tfrac{1}{M}F(x_0, y_0)}$$

Seien $y_1, y_2 \in C^0([a,b], \mathbb{R})$. Dann gilt

$$|f(y_2)(x) - f(y_1)(x)| = \left| y_2(x) - \tfrac{1}{M}F(x, y_2(x)) - y_1(x) + \tfrac{1}{M}F(x, y_1(x)) \right|$$

$$= \left| y_2(x) - y_1(x) - \tfrac{1}{M}\Big(F(x, y_2(x)) - F(x, y_1(x)) \Big) \right|.$$

Wegen $m \leq \frac{\partial F}{\partial y} \leq M$ und $F(x, y_2) - F(x, y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial F}{\partial y}(x, t)dt$ gilt

$$\tfrac{m}{M}\left(y_2(x) - y_1(x)\right) \leq \tfrac{1}{M}\Big(F(x, y_2(x)) - F(x, y_1(x)) \Big) \leq y_2(x) - y_1(x),$$

also bekommen wir

$$|f(y_2)(x) - f(y_1)(x)| \leq \left(1 - \tfrac{m}{M}\right) |y_2(x) - y_1(x)|.$$

Durch Anwenden des Supremums über $x \in [a,b]$ bekommen wir, dass die Abbildung f eine Kontraktion ist.

Die Abbildung $f : C^0([a,b],\mathbb{R}) \to C^0([a,b],\mathbb{R})$ gegeben durch

$$f(y)(x) = y(x) - \frac{1}{M}F(x, y(x)) + \frac{1}{M}F(x_0, y_0)$$

ist eine Kontraktion.

Sei $y(x)$ der Fixpunkt dieser Abbildung, d.h.,

$$y(x) = y(x) - \frac{1}{M}F(x, y(x)) + \frac{1}{M}F(x_0, y_0).$$

Dann ist (für die stetige Funktion $y(x)$) $F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)$ wie wir es wollten. Also löst $y(x)$ die Gleichung $F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)$.

Wir sehen auch, dass jede Funktion $y(x)$, die die Gleichung $F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)$ löst, Fixpunkt der Abbildung f ist. Die Eindeutigkeitsaussage des Fixpunktsatzes beweist die Eindeutigkeit der Lösung $y(x)$. Satz 33 ist damit bewiesen. $\square$