Satz über implizite Funktionen in beliebiger Dimension

Hier betrachten wir eine (lokale) Funktion in den Variablen $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ mit Werten im $\mathbb{R}^m$, also $F : U \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$. Seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Wir stellen uns die Frage, ob wir eine Funktion $y(x)$ finden könnten, welche in einer Umgebung von x_0 definiert ist (x ist n-dimensional, y ist eine Vektorwertige m-dimensionale Funktion), sodass die Gleichung $F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)$ erfüllt ist.
Wenn man diese Aufgabe explizite aufschreibt, betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) & = & C_1 & (= F_1(x_0, y_0)) \\ \vdots & & \vdots & \\ F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) & = & C_m & (= F_m(x_0, y_0)) \end{cases}$$

und versuchen sie in jedem Punkt x nach y aufzulösen.
Geht dies für jedes x in einer Umgebung von x_0, so können wir die Lösung als Funktion $y(x)$ schreiben, für die dann $F(x, y(x)) = 0$ gilt.
Wie im Satz 33 stellt sich selbstverständlich auch die Frage, wie regulär die Funktion y ist.

Bsp. Ist F linear, also von der Gestalt $F(x, y) = Ax + By$, mit $A \in Mat(m \times n), B \in Mat(m \times m)$, sodass B nichtausgeartet ist (d.h., $\det(B) \neq 0$), so lässt sich die Gleichung $F(x, y) = C$ immer nach y auflösen. In diesem Fall gilt $y(x) = B^{-1}(C - Ax)$. Die Bedingung, dass B nichtausgeartet ist, ist wichtig, weil für ausgeartete Matrizen die Gleichung (bis auf trivialle Fälle, etwa wenn $A = \mathbf{0}$) nicht lösbar ist.

Satz 34 (Satz über implizite Funktionen).
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ ein Gebiet und $F : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei ferner $F(x_0, y_0) = C = (C_1, ..., C_m)$ und die $m \times m$-Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ nichtausgeartet.
Dann gibt es Umgebungen $W(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V(y_0) \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $y : W \to V$ mit $y(x_0) = y_0$ sodass $F(x, y(x)) = C$.

Bemerkung. Um die Ähnlichkeit des Satzes mit dem linearen Beispiel zu sehen, setzen wir die Taylorreihe von F in die Gleichung $F(x, y) = C$ ein:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right)}_{A}(x - x_0) + \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)}_{B}(y - y_0) + R = C.$$

(Wie üblich bezeichnen wir mit R die kleinere Terme höherer Ordnung).Wir sehen, dass die nichtlineare Gleichung $F(x, y) = C$ bis auf kleine Störungen die lineare Gleichung $Ax + By = \tilde{C}$ ist. Satz 34 sagt also, dass diese kleine Störung die Lösbarkeit nicht beeinträchtigt.

Beweis.

O.B.d.A. denken wir, dass $x_0 = \vec{0}_n$, $y_0 = \vec{0}_m$, und $C = \vec{0}_m$; Wir arbeiten im Raum der stetigen vektorwertigen Funktionen y von n Variablen, $y : \overline{W}(\vec{0}_n) \to \mathbb{R}^m$, welche im Punkt $\vec{0}_n$ den Wert $\vec{0}_m$ annehmen.Der Raum ist vollständig (weil die Menge von Funktionen, für die $y(\vec{0}_n) = \vec{0}_m$, abgeschlossen im Raum der stetigen Funktionen ist). Sei $B_{(x)} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \vec{0}_m)\right)$ und sei $B = B_{(0)}$. Als f nehmen wir

$$f(y)(x) = y(x) - \tfrac{1}{2} B^{-1} F(x, y(x)).$$

Die Funktion $f(y)$ ist stetig und hat im Punkt x_0 den Wert y_0. Diese Abbildung ist eine Kontraktion, falls W genug klein ist: wir zeigen es durch Entwickeln von F als Taylorreihe bzgl. y: $F(x, y) = F(x, 0) + B_{(x)} y + R_{(x)}$, wobei $R_{(x)}$ wieder die kleinere Terme (in y) bezeichnet. Dann gilt:

$$|f(y_2)(x) - f(y_1)(x)| = |y_2 - y_1 - \tfrac{1}{2} B^{-1}(B_{(x)}(y_2 - y_1) + R_{(x)})|.$$

$$\boxed{|f(y_2)(x) - f(y_1)(x)| = |y_2 - y_1 - \tfrac{1}{2}B^{-1}(B_{(x)}(y_2 - y_1) + R_{(x)})|.}$$

Jetzt überlegen wir uns, dass die Matrix $\frac{1}{2}B^{-1}B_{(x)}$ stetig in x ist, im Punkt $x = 0$ mit $\frac{1}{2}Id$ zusammenfällt und deswegen ist nahe zu $\frac{1}{2}Id$ in W, falls W klein genug ist.

Dann ist $|f(y_2)(x) - f(y_1)(x)| \leq C|y_1 - y_2|$ (Die Konstante C hängt von der Umgebung W ab; für eine sehr kleine Umgebung ist C nur ein bisschen großer als $\frac{1}{2}$).Wir sehen, dass die Abbildung f eine Kontraktion ist, deswegen gibt es einen (eindeutigen) Fixpunkt y; also mit der Eigenschaft

$$y(x) = y(x) - \tfrac{1}{2}B_{(0)}^{-1}F(x, y(x))$$

und deswegen $F(x, y(x)) = 0$. $\square$

Vergleichen wir die zwei Versionen, Satz 33 und 34

Satz 33 (Satz über Implizite Funktion in Dimension 1).
Es sei $F : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass $\frac{\partial F}{\partial y}$ (wobei $y \in \mathbb{R}$ die zweite Variabele von $F(x, y)$ ist) existiert und stets zwischen positiven m und M liegt, also $0 < m \leq \frac{\partial F}{\partial y} \leq M$. Sei $(x_0, y_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine stetige Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ sodass für jedes $x \in [a, b]$ gilt $F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)$.

Satz 34 (Satz über implizite Funktionen).
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ ein Gebiet und $F : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei ferner $F(x_0, y_0) = C = (C_1, ..., C_m)$ und die $m \times m$-Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ nichtausgeartet. Dann gibt es Umgebungen $W(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V(y_0) \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $y : W \to V$ mit $y(x_0) = y_0$ sodass $F(x, y(x)) = C$.

Wir sehen, dass sie ähnlich sind, und die orange gefärbten Worten im Wesentlichen dasselbe bedeuten. Es ist also kein Wunder, dass die Beweise fast gleich sind.

Satz 34 (Satz über implizite Funktionen).
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ ein Gebiet und $F : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei ferner $F(x_0, y_0) = C = (C_1, ..., C_m)$ und die $m \times m$-Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ nichtausgeartet. Dann gibt es Umgebungen $W(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V(x_0) \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $y : W \to V$ mit $y(x_0) = y_0$ sodass $F(x, y(x)) = C$.

Im Vergleich mit der Standard-Formulierung fehlt bei mir noch die folgende zusätzliche Aussage: **Ferner gilt: die Funktion** y **ist auch stetig differenzierbar und es gilt:**

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)). \qquad (*)$$

(Es ist eine Matrizen-Gleichung).
Diese zusätzliche Aussage folgt aber sofort aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial F(x, y(x))}{\partial x} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Bemerkung. Aus der Formel $(*)$ sehen wir, dass wenn $F(x, y)$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion ist, dann ist auch y eine k-mal stetig differenzierbare Funktion.