Einfache Anwendung des Satzes über implizite Funktionen

Frage. (Unter welchen Bedingungen) Hängen die Nullstellen eines Polynoms regulär (z.B. differenzierbar) von den Koeffizienten des Polynoms ab?
Antwort: Ja, im Falle einfacher Nullstellen (mit Multiplizität 1).
Beweis. Wir betrachten das Polynom $F(x, y) = y^n + x_1 y^{n-1} + ... + x_n$ und die Gleichung $F(x, y) = 0$; die Lösungen (x, y) der Gleichung entsprechen den Nullstellen des Polynoms mit Koeffizienten x.

Für den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sei y_0 eine Nullstelle (es gibt höchstens n), also $F(x_0, y_0) = 0$. Ist $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, so sind die Voraussetzungen des Satzes 33 erfüllt und dann wir sind fertig (dann gibt eine Umgebung von x_0 und eine stetig differenzierbare Funktion y auf dieser Umgebung, sodass im Punkt x aus dieser Umgebung die Zahl $y(x)$ die Nullstelle des Polynoms $y^n + x_1 y^{n-1} + ... + x_n$ ist).

Jetzt überlegen wir, dass die Bedingung $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ äquivalent zur Bedingung ist, dass die Nullstelle y_0 die Vielfachheit ≥ 2 hat:
Sei $F(x_0, y) = (y - y_0)P_{n-1}(y)$. Dann ist
$\frac{dF}{dy}(y) = \underbrace{(y - y_0)\frac{dP_{n-1}(y)}{dy}}_{=0 \text{ in } y = y_0} + P_{n-1}(y)$; aus $\frac{dF}{dy}(y_0) = 0$ folgt also $P(y_0) = 0$ und umgekehrt. $\square$

Weitere Anwendung (jetzt in gewöhnlichen Differentialgleichungen)

Gewöhnliche Differentialgleichung :

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \qquad (*)$$

Gewöhnliche Differentialgleichung in Euler-Form:

$$y^{(n)} = f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right). \qquad (**)$$

Aus der Satz 34 folgt, dass, (falls $F : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\cdot(n+1)} \to \mathbb{R}^\ell$ eine C^1-Funktion ist und) falls die Matrix $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}$ nichtausgeartet ist, es eine Funktion $f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right)$ gibt, sodass $(*)$ zu $(**)$ äquivalent ist; in diesem Fall gelten die Sätze von Picard-Lindelöf auch für die Differentialgleichung $(*)$.
Man merke aber, dass Nichtausgeartetheit der Matrix impliziert, dass sie quadratisch ist, also dass m ($=$ Dimension von y) gleich ℓ ($=$ Anzahl von Gleichungen) ist. Ist $m > \ell$, dann ist das Gleichungssystem immer noch lösbar, weil man zusätzliche, fast beliebige Gleichungen dazu schreiben kann; dann ist die Lösung aber nicht eindeutig. Ist $m < \ell$, dann ist das System i.d.R nicht lösbar.