

Beweis : seien $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \text{dist}(\Gamma, \partial\Omega)$, $\Gamma_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\Gamma, y) \leq 2\varepsilon\}$ kompakt $\leadsto \Gamma \subset \Gamma_\varepsilon \subset \Omega$

$$\Gamma \subset \bigcup_{x \in \Gamma} K_\varepsilon(x) \xrightarrow{\text{Satz 1.13}} \exists x^1, \dots, x^m \in \Gamma : \Gamma \subset \bigcup_{j=1}^m K_\varepsilon(x^j) \subset \Gamma_\varepsilon \subset \Omega$$

sei ω gegeben durch (9)

$$\leadsto \psi(x) = \sum_{j=1}^m \omega\left(\frac{x - x^j}{\varepsilon}\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \psi \subset \bigcup_{j=1}^m \overline{K_\varepsilon(x^j)} \subset \Gamma_\varepsilon \subset \Omega,$$

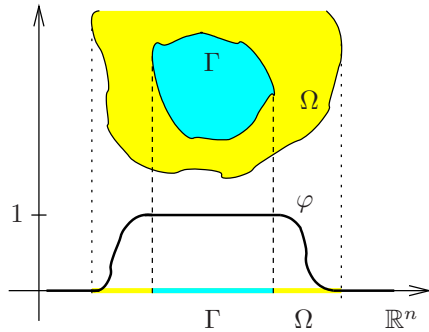
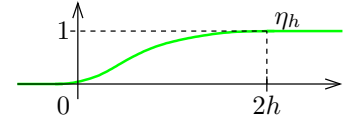
$$x \in \Gamma \leadsto \exists j \in \{1, \dots, m\} : x \in K_\varepsilon(x^j) \leadsto \psi(x) > \omega\left(\frac{x - x^j}{\varepsilon}\right) > 0 \leadsto h_0 = \min_{x \in \Gamma} \psi(x) > 0$$

betrachten auf $\mathbb{R}$: $\omega_h(\cdot - h)$, $h > 0$, mit ω_h aus (10)

$$\text{supp } \omega_h = [-h, h] \leadsto \text{supp } \omega_h(\cdot - h) = [0, 2h], \quad \int_{\mathbb{R}} \omega_h(t - h) dt = \int_0^{2h} \omega_h(t - h) dt = 1; \quad \text{setzen}$$

$$\eta_h(t) = \begin{cases} \int_0^t \omega_h(s - h) ds, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$\leadsto \eta_h \in C^\infty(\mathbb{R}), \text{supp } \eta_h \subset [0, \infty), \text{ mit } \eta_h(t) \begin{cases} = 1 & t \geq 2h, \\ \in [0, 1], & 0 < t < 2h, \\ = 0, & t \leq 0 \end{cases}$$



setzen

$$\varphi = \eta_{h_0/2} \circ \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \leadsto \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$x \in \Gamma \leadsto \psi(x) \geq \min_{y \in \Gamma} \psi(y) = h_0 > 0 \leadsto \eta_{h_0/2}(\psi(x)) = 1$$

$$x \in \Omega \setminus \Gamma_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n \setminus \Gamma_\varepsilon \leadsto \psi(x) = 0 \leadsto \eta_{h_0/2}(\psi(x)) = 0$$

$$\leadsto \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \text{supp } \varphi \subset \Gamma_\varepsilon \subset \Omega, \quad \varphi(x) \begin{cases} = 1 & x \in \Gamma, \\ \in [0, 1], & x \in \Gamma_\varepsilon, \\ = 0, & x \in \Omega \setminus \Gamma_\varepsilon \end{cases}$$

□

1.3 Die Lebesgue-Räume $L_p(\Omega)$

1.3.1 Maße und messbare Funktionen

Definition 1.50 Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Ein System von Teilmengen $\mathfrak{A}$ von Ω heißt σ -Algebra, falls gelten

- (i) $\Omega \in \mathfrak{A}, \emptyset \in \mathfrak{A}$
- (ii) $A \in \mathfrak{A} \leadsto \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$
- (iii) $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A} \leadsto \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{A}$

Bemerkung : • sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A} \xRightarrow{(ii)} (\Omega \setminus A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A} \xRightarrow{(iii)} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_k) = \Omega \setminus \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{A}$

$$\xRightarrow{(ii)} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{A}$$

- Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist σ -Algebra

Definition 1.51 Sei $\mathfrak{A}$ eine σ -Algebra über Ω . Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt Maß auf $\mathfrak{A}$, falls gelten

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Für alle Mengen $A_k \in \mathfrak{A}$, $k \in \mathbb{N}$, mit $A_k \cap A_j = \emptyset$, $k \neq j$, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Jedes $A \in \mathfrak{A}$ heißt $(\mu-)$ messbare Menge, das Tripel $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ nennt man Maßraum.

Bemerkung :

- $\mu(A) = \infty$ möglich
- aus (ii) folgt Monotonie: seien $A, B \in \mathfrak{A}$ mit $A \subset B \leadsto B \setminus A = B \cap (\Omega \setminus A) \in \mathfrak{A}$
 $\xRightarrow{(ii)} \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$

Definition 1.52 Sei $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein Maßraum.

- (i) μ heißt σ -endliches Maß, falls es ein System $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ gibt mit

$$\mu(A_k) < \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \quad \Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

In diesem Fall nennt man $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ einen σ -endlichen Maßraum.

- (ii) μ heißt endliches Maß, falls $\mu(\Omega) < \infty$ gilt.
- (iii) μ heißt vollständig, falls für alle $N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) = 0$ und alle $A \subset N$ folgt $A \in \mathfrak{A}$. In diesem Fall nennt man $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ einen vollständigen Maßraum.

Bemerkung : wegen der Monotonie impliziert (iii) unmittelbar $0 \leq \mu(A) \leq \mu(N) = 0$, d.h. $\mu(A) = 0$

Beispiel : $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mu = \nu$ Zählmaß, d.h. $\nu(A) = \#A = \text{card}(A) \leadsto [\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \nu]$ vollständiger σ -endlicher Maßraum

wichtigstes Beispiel hier: Lebesgue²²-Maß auf $\mathbb{R}^n$

Definition 1.53 Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt Borel²³-Menge, falls B durch abzählbar viele Mengenoperationen (Vereinigung, Durchschnitt, Komplementbildung) offener Mengen entstanden ist.

Bezeichnung: seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a_j < b_j$, $j = 1, \dots, n$

$$Q = \bigtimes_{j=1}^n (a_j, b_j) = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{offener Quader (Intervall)}$$

Lemma 1.54 (i) Die Familie der Borelmengen $\mathfrak{B}_n$ ist die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ enthält.

(ii) Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist die abzählbare Vereinigung einer Folge offener Quader, $\Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Q_m$.

²²Henri Léon Lebesgue (* 28.6.1875 Beauvais, Picardie/Frankreich † 26.7.1941 Paris)

²³Félix Edouard Justin Emile Borel (* 7.1.1871 Aveyron/Frankreich † 3.2.1956 Paris)

- Bemerkung :**
- Darstellung in (ii) nicht eindeutig
 - Ein Maß μ auf $[\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n]$ heißt *Borel-Maß*.

Ziel: spezielles Borelmaß $\lambda_n : \mathfrak{B}_n \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\lambda_n(Q) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j), \quad Q = \bigtimes_{j=1}^n (a_j, b_j)$$

Satz 1.55 Sei $\mathfrak{B}_n$ die σ -Algebra der Borelmengen auf $\mathbb{R}^n$. Es existiert genau ein σ -endliches Maß λ auf $\mathfrak{B}_n$, so dass

$$\lambda(Q) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

für alle offenen Quader $Q = \bigtimes_{j=1}^n (a_j, b_j)$ gilt.

- Bemerkung :**
- *elementargeometrisches Volumen* $\prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ ist (Lebesguesches) *Prämaß*, d.h. erfüllt Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 1.51, aber auf Halbring²⁴ $\mathfrak{H}$ statt σ -Algebra $\mathfrak{A}$

- dann: *äußeres Maß*²⁵ $\mu^* : \mathfrak{P}(\mathbb{X}) \rightarrow [0, \infty]$
 $A \subset \mathbb{X}$ μ^* -messbar $\iff \forall B \subset \mathbb{X} : \mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$
*Satz von Carathéodory*²⁶: sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\mathbb{X}) \rightarrow [0, \infty]$ äußeres Maß

$$\curvearrowright \mathfrak{A}_* = \{A \subset \mathbb{X} : A \text{ } \mu^* \text{-messbar}\} \quad \sigma\text{-Algebra,} \quad \mu^*|_{\mathfrak{A}_*} \text{ Maß}$$

- *Fortsetzungssatz*: sei $\mu : \mathfrak{H} \rightarrow [0, \infty]$ Prämaß $\curvearrowright \mu^* : \mathfrak{P}(\mathbb{X}) \rightarrow [0, \infty]$, gegeben durch

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) : A_k \in \mathfrak{H}, A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right\}$$

äußeres Maß, alle Mengen aus $\mathfrak{H}$ sind μ^* -messbar, $\mu^*|_{\mathfrak{H}} = \mu \curvearrowright \mu^*|_{\mathfrak{A}_*}$ Fortsetzung von μ zu Maß auf σ -Algebra, die $\mathfrak{H}$ umfasst

- speziell: Konstruktion von λ^* zu λ :

$$\lambda^*(\Omega) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(\Omega_k) : \Omega \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k, \Omega_k \in \mathfrak{B}_n \right\}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

möglich: $\Omega_k = Q_k$ offene Quader, abgeschlossene Quader, ...

- $[\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n, \lambda]$ nicht vollständig
- Satz²⁷ von Hahn²⁸: Jedes Maß besitzt eine kleinste vollständige Erweiterung.

Satz 1.56 Es gibt eine kleinste vollständige Erweiterung $[\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}_n, \lambda_n]$ von $[\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n, \lambda]$, d.h.

- (i) $[\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}_n, \lambda_n]$ ist ein vollständiger, σ -endlicher Maßraum,
- (ii) λ_n setzt λ auf $\mathfrak{L}_n \supset \mathfrak{B}_n$ fort: $\forall A \in \mathfrak{B}_n : \lambda_n(A) = \lambda(A) \iff \lambda_n|_{\mathfrak{B}_n} = \lambda$,
- (iii) für alle Maßräume $[\mathbb{R}^n, \mathfrak{A}, \mu]$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) folgt $\mathfrak{L}_n \subset \mathfrak{A}$ sowie $\mu|_{\mathfrak{L}_n} = \lambda_n$.

²⁴ $\emptyset \in \mathfrak{H}$; $A, B \in \mathfrak{H} \curvearrowright A \cap B \in \mathfrak{H}$; $A, B \in \mathfrak{H} \curvearrowright \exists C_1, \dots, C_m \in \mathfrak{H}, C_j \cap C_i = \emptyset, i \neq j : A \setminus B = \bigcup_{k=1}^m C_k$

²⁵ $\mu^*(\emptyset) = 0$, $A \subset B \subset \mathbb{X} \curvearrowright \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, $(A_n)_n \subset \mathbb{X} \curvearrowright \mu^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$

²⁶ Constantin Carathéodory (* 13.9.1873 Berlin † 2.2.1950 München)

²⁷ Jedes σ -endliche Prämaß μ_0 lässt sich zu einem eindeutig bestimmten vollständigen Maß μ erweitern, das auch σ -endlich ist.

²⁸ Hans Hahn (* 27.9.1879 Wien † 24.7.1934 Wien)

Bezeichnungen:

- $[\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}_n, \lambda_n]$ aus Satz 1.56: *Lebesguescher Maßraum*, λ_n *Lebesgue-Maß*
- $A \subset \mathbb{R}^n$ *Lebesgue-messbar* $\iff A \in \mathfrak{L}_n$, $|A| = \lambda_n(A)$, $A \in \mathfrak{L}_n$
- $N \in \mathfrak{L}_n$ *Lebesguesche Nullmenge* $\iff \lambda_n(N) = 0$

Satz 1.57 (i) $N \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Lebesguesche Nullmenge genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (Q_k)_{k \in \mathbb{N}}, N \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k : \sum_{k \in \mathbb{N}} |Q_k| < \varepsilon$$

(ii) Jede abzählbare Menge in $\mathbb{R}^n$ ist Lebesguesche Nullmenge.

(iii) Das Lebesgue-Maß ist invariant bezüglich Translation und Rotation im $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x^0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall A \in \mathfrak{L}_n \quad \forall T \in \mathcal{O}(n) : \quad \lambda_n(x^0 + A) = \lambda_n(A) = \lambda_n(\{Tx : x \in A\})$$

(iv) Das Lebesgue-Maß λ_n ist regulär, d.h.

$$\forall A \in \mathfrak{L}_n \quad \exists B \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} \quad \exists F \subset \mathbb{R}^n \text{ abgeschlossen} : F \subset A \subset B, \lambda_n(B \setminus A) < \varepsilon, \lambda_n(A \setminus F) < \varepsilon$$

Bemerkung :

- Translationsinvarianz in (iii) charakteristisch: sei μ translationsinvariant auf $\mathfrak{L}_n$ mit $\mu((0, 1]^n) = 1 \rightsquigarrow \mu = \lambda_n$
- Verallgemeinerung der Rotationsinvarianz in (iii): sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bijektive, affine Abbildung, $A \in \mathfrak{L}_n \rightsquigarrow \Phi(A) \in \mathfrak{L}_n$, $\lambda_n(\Phi(A)) = |\det \Phi| \lambda_n(A)$

Beispiel : seien $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}^n$, $V = \{\gamma_1 a^1 + \dots + \gamma_n a^n, \gamma_i \in [0, 1]\} = \Phi(Q_0)$ Parallelepiped Q_0 Einheitswürfel, $\Phi = (a^1, \dots, a^n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ betrachtet als $n \times n$ -Matrix

$$\rightsquigarrow \text{vol}(V) = \lambda_n(V) = |\det(a^1, \dots, a^n)|$$

bzw. mittels *Gram²⁹-Determinante*

$$g(a^1, \dots, a^n) = \begin{vmatrix} \langle a^1, a^1 \rangle & \langle a^1, a^2 \rangle & \dots & \langle a^1, a^n \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle a^n, a^1 \rangle & \langle a^n, a^2 \rangle & \dots & \langle a^n, a^n \rangle \end{vmatrix} \rightsquigarrow \text{vol}(V) = \sqrt{g(a^1, \dots, a^n)}$$

Bemerkung :

- anstelle von (iv) gilt sogar für $A \subset \mathbb{R}^n$: $A \in \mathfrak{L}_n$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, F \subset \mathbb{R}^n \text{ abgeschlossen} : F \subset A \subset B, \lambda_n(B \setminus F) < \varepsilon$$

- $A \in \mathfrak{L}_n \rightsquigarrow \lambda_n(A) = \inf\{\lambda_n(B) : B \supset A, B \text{ offen}\} = \sup\{\lambda_n(F) : F \subset A, F \text{ abgeschlossen}\} = \sup\{\lambda_n(K) : K \subset A, K \text{ kompakt}\}$
- $A \in \mathfrak{A}$ von innen regulär $\iff \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \mathfrak{A}, K \text{ kompakt}\}$
 $A \in \mathfrak{A}$ von außen regulär $\iff \mu(A) = \inf\{\mu(B) : A \subset B, B \in \mathfrak{A}, B \text{ offen}\}$
 $A \in \mathfrak{A}$ regulär $\iff A$ von innen & außen regulär; μ regulär $\iff \forall A \in \mathfrak{A} : A$ regulär
- Es gilt $\mathfrak{L}_n \subsetneq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\exists M \subset \mathbb{R}^n : M \notin \mathfrak{L}_n$ (Vitali 1905)

Bezeichnungen

- charakteristische Funktion $\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$
- $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ vollständig, σ -endlich;
Eigenschaft **H** gilt auf $A \subset \Omega$ μ -fast überall (μ -f.ü.) $\iff \exists N \in \mathfrak{A}, \mu(N) = 0 : \mathbf{H}$ gilt auf $A \setminus N$

²⁹Jorgen Pedersen Gram (* 27.6.1850 Nustrup/Dänemark † 29.4.1916 Kopenhagen)

Definition 1.58 Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$.

- (i) Eine Funktion $s : A \rightarrow \mathbb{K}$ heißt einfache Funktion oder Treppenfunktion, falls $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, \dots, m$, existieren mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^m A_j \quad \text{und} \quad s(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A \cap A_j}(x), \quad x \in A.$$

- (ii) Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ heißt μ -messbar, falls eine Folge von Treppenfunktionen $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existiert, so dass $s_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$ μ -f.ü. auf A gilt.

Beispiele : (a) $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ Maßraum, $A \subset \mathbb{X}$, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$; $f = \alpha \chi_A$ μ -messbar $\iff A \in \mathfrak{A}$

(b) $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu] = [\mathbb{R}, \mathfrak{L}_1, \lambda_1]$; $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ spezielle "Treppenfunktion"

Satz 1.59 Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$, $f : A \rightarrow \mathbb{K}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) f ist μ -messbar
- (ii) Die Urbilder offener Mengen in $\mathbb{K}$ unter f sind μ -messbar.
- (iii) Die Urbilder von Borelmengen in $\mathbb{K}$ unter f sind μ -messbar.

Bezeichnung: $f : A \rightarrow \mathbb{R} \rightsquigarrow f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0) \rightsquigarrow f = f^+ - f^-$

Satz 1.60 Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$.

- (i) Für $f, g : A \rightarrow \mathbb{K}$ μ -messbar sind auch $f + g$, fg , $\frac{f}{g}$, $|f|^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ μ -messbar.
- (ii) Seien $f_k : A \rightarrow \mathbb{K}$ μ -messbar, $k \in \mathbb{N}$, mit $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$ μ -f.ü. Dann ist auch f μ -messbar.
- (iii) Für $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ μ -messbar sind auch f^+ , f^- , $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ μ -messbar.
- (iv) Für $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ μ -messbar, $k \in \mathbb{N}$, sind $\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$, $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k$, $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$ und $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ μ -messbar.

Satz 1.61 (Egorov³⁰)

Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$, $f_k : A \rightarrow \mathbb{K}$ μ -messbar für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f \text{ } \mu\text{-f.ü. auf } A \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_\varepsilon \in \mathfrak{A} : \mu(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon \wedge f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f \text{ gleichmäßig auf } A_\varepsilon$$

Satz 1.62 Seien $[\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}_n, \lambda_n]$ der Lebesguesche Maßraum, $A \subset \mathbb{R}^n$.

- (i) Falls $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ λ_n -f.ü. stetig ist, so ist f λ_n -messbar.
- (ii) Falls ∂A eine Lebesgue-Nullmenge ist, d.h. $\partial A \in \mathfrak{L}_n$ mit $\lambda_n(\partial A) = 0$, so ist $A \in \mathfrak{L}_n$.
- (iii) $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ ist λ_n -messbar, falls f_A λ_n -f.ü. stetig ist auf $\mathbb{R}^n$, wobei $f_A = \begin{cases} f, & \text{auf } A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

³⁰Dimitri Fedorovich Egorov (* 22.12.1869 Moskau † 10.9.1931 Kazan)

Bemerkung : Satz von Lusin³¹: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ λ_n -messbar. Dann existieren für alle $\varepsilon > 0$ und $A \in \mathfrak{L}_n$ eine kompakte Menge $K \subset A$, so dass $\lambda_n(A \setminus K) \leq \varepsilon$ gilt, sowie eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$, die auf K mit f übereinstimmt.

1.3.2 Das Lebesgue-Integral

Definition 1.63 Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$.

(i) Für eine einfache Funktion $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A \cap A_j}$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $A_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, \dots, m$, setzt man

$$\int_A s(x) d\mu = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A \cap A_j).$$

(ii) Eine μ -messbare Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ heißt μ -integrierbar, falls für eine Folge von Treppenfunktionen $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $s_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$ μ -f.ü. auf A gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) : \int_A |s_n(x) - s_m(x)| d\mu < \varepsilon.$$

Man setzt in diesem Fall

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A s_n(x) d\mu$$

(unabhängig von der Auswahl der Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

Bemerkung : • seien $f = g$ μ -f.ü. und f μ -integrierbar $\leadsto g$ μ -integrierbar, $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$

• $\int_A 1 d\mu = \int_A d\mu = \mu(A)$, $A \in \mathfrak{A}$

• sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ μ -messbar $\leadsto \int_A f d\mu = \int_\Omega f \chi_A d\mu$, falls das Integral existiert

• anderer Zugang:

– zunächst $f : A \rightarrow [0, \infty]$ μ -messbar $\leadsto \int_A f d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_A s d\mu$, falls existent

– $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μ -messbar $\xrightarrow[f = f^+ - f^-]{} \int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$

– $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ μ -messbar $\xrightarrow[f = \Re f + i \Im f]{} \int_A f d\mu = \int_A \Re f d\mu + i \int_A \Im f d\mu$

Beispiel : $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ λ_1 -messbar $\dashrightarrow \exists \int_0^1 f d\lambda_1 = 0$

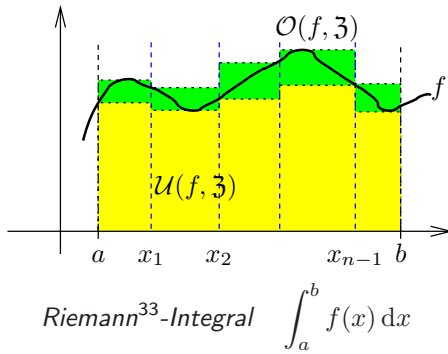
Satz 1.64 (Lebesgue/Vitali³²)

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Quader. Eine beschränkte Funktion $f : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{K}$ ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte eine λ_n -Nullmenge ist; in diesem Fall gilt

$$\int_Q f(x) dx = \int_Q f d\lambda_n.$$

³¹Nikolai Nikolaevich Lusin (* 9.12.1883 Irkutsk † 25.2.1950 Moskau)

³²Guisepppe Vitali (* 26.8.1875 Ravenna † 29.2.1932 Bologna)

Geometrische Deutung der beiden IntegraleZerlegung $\mathfrak{Z}$ des Integrationsgebietes,

$$[a, b] = \bigcup_{j=1}^n I_j$$

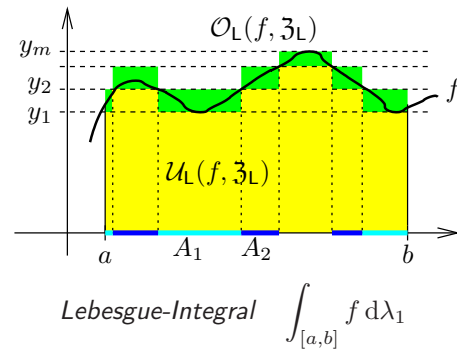
mit $I_j = [x_j, x_{j+1})$

$$\mathcal{U}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^n \inf_{x \in I_j} f(x) |I_j|$$

$$\mathcal{O}(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^n \sup_{x \in I_j} f(x) |I_j|$$

falls $\mathcal{U}(f) = \sup_{\mathfrak{Z}} \mathcal{U}(f, \mathfrak{Z}) = \inf_{\mathfrak{Z}} \mathcal{O}(f, \mathfrak{Z}) = \mathcal{O}(f)$

$$\leadsto \exists \int_a^b f(x) dx = \mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f)$$

Zerlegung $\mathfrak{Z}_L$ des Wertebereiches,

$$\left[\inf_{x \in [a,b]} f(x), \sup_{x \in [a,b]} f(x) \right] = \bigcup_{j=1}^{m-1} [y_j, y_{j+1})$$

und $A_j = \{x \in [a, b] : y_j \leq f(x) < y_{j+1}\}$

$$\mathcal{U}_L(f, \mathfrak{Z}_L) = \sum_{j=1}^{m-1} y_j \lambda_1(A_j)$$

$$\mathcal{O}_L(f, \mathfrak{Z}_L) = \sum_{j=1}^{m-1} y_{j+1} \lambda_1(A_j)$$

falls $\mathcal{U}_L(f) = \sup_{\mathfrak{Z}_L} \mathcal{U}_L(f, \mathfrak{Z}_L) = \inf_{\mathfrak{Z}_L} \mathcal{O}_L(f, \mathfrak{Z}_L) = \mathcal{O}_L(f)$

$$\leadsto \exists \int_{[a,b]} f d\lambda_1 = \mathcal{U}_L(f) = \mathcal{O}_L(f)$$

Wiederholung: Jordan³⁴-Messbarkeit für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω beschränkt
 $S \subset \mathbb{R}^n$ Q-Gebiet $\iff \exists Q_1, \dots, Q_m, Q_j \cap Q_k = \emptyset, j \neq k$:

$$S = \bigcup_{k=1}^m \overline{Q_k}$$

setzen $|\Omega|_i = \sup \{|S| : S \text{ Q-Gebiet, } S \subseteq \Omega\}$
 $|\Omega|_a = \inf \{|T| : T \text{ Q-Gebiet, } T \supseteq \Omega\}$

 Ω Jordan-messbar $\iff |\Omega|_i = |\Omega|_a = |\Omega|^{(n)}$ Jordan-Inhalt (bzw. Peano³⁵-Inhalt)

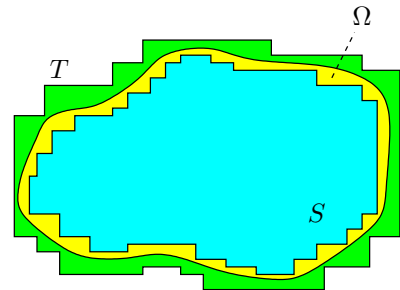
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists Q_\varepsilon \text{ Q-Gebiet : } \partial\Omega \subset Q_\varepsilon, |Q_\varepsilon|^{(n)} < \varepsilon \iff |\partial\Omega|^{(n)} = 0$$

$$\iff \chi_\Omega \text{ bezüglich beliebigem Quader } Q \supset \Omega \text{ integrierbar; dann ist } \int_Q \chi_\Omega(x) dx = |\Omega|^{(n)}$$

Bemerkung : • sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ beschränkt $\xRightarrow{\text{früher}} \exists \int_\Omega f(x) dx$ Riemann-Integral; andererseits: Ω Jordan-messbar $\leadsto \Omega \in \mathfrak{L}_n \leadsto \exists \int_\Omega f d\lambda_n$, es gilt:

$$\int_\Omega f(x) dx = \int_\Omega f d\lambda_n$$

• absolut konvergente (uneigentliche) Riemann-Integrale auch identisch mit Lebesgue-Integralen

³³Georg Friedrich Bernhard Riemann (* 17.9.1826 Hannover † 20.7.1866 Selasca/Italien)³⁴Marie Ennemond Camille Jordan (* 5.1.1838 Lyon † 22.1.1922 Paris)³⁵Giuseppe Peano (* 27.8.1858 Cuneo/Italien † 20.4.1932 Turin)

Schreibweise: $[\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}_n, \lambda_n]$ Lebesguescher Maßraum, $A \in \mathfrak{L}_n$: $\int_A f \, d\lambda_n = \int_A f(x) \, dx$

Satz 1.65 Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) > 0$.

(i) Für μ -integrierbare Funktionen $f, g : A \rightarrow \mathbb{K}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ existiert $\int_A (\alpha f + \beta g) \, d\mu$, es gilt

$$\int_A (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_A f \, d\mu + \beta \int_A g \, d\mu$$

(ii) Für μ -integrierbare Funktionen $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, für die $f \leq g$ μ -f.ü. gilt, ist

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu.$$

(iii) $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ ist genau dann μ -integrierbar, wenn $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ μ -integrierbar ist; es gilt

$$\left| \int_A f \, d\mu \right| \leq \int_A |f| \, d\mu$$

(iv) Sei $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ μ -integrierbar. Dann gilt

$$\int_A |f| \, d\mu = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{-f.ü.}$$

(v) Für eine messbare Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ und eine μ -integrierbare Funktion $g : A \rightarrow \mathbb{K}$, für die $|f| \leq |g|$ μ -f.ü. gilt, ist auch f μ -integrierbar mit

$$\int_A |f| \, d\mu \leq \int_A |g| \, d\mu.$$

Bemerkung : • insbesondere: $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ μ -integrierbar, $g : A \rightarrow \mathbb{K}$ messbar mit $f = g$ μ -f.ü.

$$\leadsto g \text{ } \mu\text{-integrierbar,} \quad \int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$$

- für Riemann-Integrale keine Äquivalenz in (iii), z.B. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
 $\exists \int_0^1 f \, d\lambda_n = -1, \exists \int_0^1 |f| \, d\lambda_n = 1 = \int_0^1 |f(x)| \, dx, \quad \text{aber:} \quad \nexists \int_0^1 f(x) \, dx$

Beispiele : (a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \text{ mit minimalem } p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$\leadsto \lambda_1(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0 \xrightarrow{\text{Satz 1.64}} f \text{ Riemann-integrierbar,}$$

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 f \, d\lambda_1 \stackrel{\text{Satz 1.65(iv)}}{=} 0$$

$$(b) f(x) = \frac{\sin x}{x}, x > 0 \xrightarrow{\text{bekannt}} \exists \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx, \quad \nexists \int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx$$

$$\xrightarrow{\text{Satz 1.64}} \nexists \int_0^\infty |f| \, d\lambda_1 \xrightarrow{\text{Satz 1.65(iii)}} \nexists \int_0^\infty f \, d\lambda_1$$

Satz 1.66 Sei $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum.

(i) Falls $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ μ -integrierbar und $A \in \mathfrak{A}$ sind, so gilt

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_{\Omega \setminus A} f \, d\mu$$

(ii) Seien $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μ -integrierbar, $A \in \mathfrak{A}$, $f > 0$ auf A sowie $\int_A f \, d\mu = 0$. So folgt $\mu(A) = 0$.

Folgerung 1.67 Sei $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum.

(i) Für eine Folge $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ mit $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, $A_k \in \mathfrak{A}$, gilt $\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f \, d\mu$.

(ii) Seien $w : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ μ -integrierbar, $A \in \mathfrak{A}$. Dann ist $\nu(A) = \int_A w \, d\mu$ ein endliches Maß auf A .

jetzt: Konvergenzsätze $\leadsto \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k \, d\mu = \int_A \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\mu$?

Satz 1.68 (Lebesgue)

Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$, $f_k : A \rightarrow \mathbb{K}$ μ -messbar. Es existieren eine μ -integrierbare Funktion $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $|f_k(x)| \leq g(x)$ μ -f.ü. in A , sowie $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ μ -f.ü. auf A . Dann ist f μ -integrierbar auf A , es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k \, d\mu = \int_A \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

Bemerkung : Satz von der *majorisierten Konvergenz* bzw. *integrierbaren Majorante*
wesentlich: g μ -integrierbar!

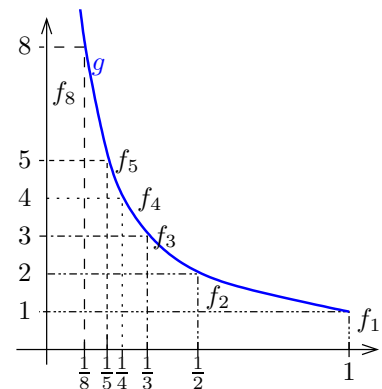
betrachten $f_k(x) = \begin{cases} k, & x \in [0, \frac{1}{k}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$\leadsto \int_0^{\infty} f_k(x) \, dx = 1 = \int_0^{\infty} f_k \, d\lambda_1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0 \equiv f \quad \lambda_1\text{-f.ü.}$$

$$\leadsto 1 = \int_0^{\infty} f_k(x) \, dx \neq \int_0^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \, dx = 0$$

da g nicht λ_1 -integrierbar



Folgerung 1.69 Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$, $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ μ -integrierbar, sowie $(A_k)_k$ eine Zerlegung von A , d.h. $A_k \in \mathfrak{A}$, $A_k \cap A_j = \emptyset$, $k \neq j$, $A = \bigcup_k A_k$. Dann gilt

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f \, d\mu.$$

Beispiel : sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ differenzierbar, f' beschränkt (nicht notwendig stetig!) $\leadsto f' \lambda_1$ -integrierbar auf $[a, b]$ mit

$$\int_a^b f' d\lambda_1 = f(b) - f(a)$$

denn: $f_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f'(x)$ auf $[a, b]$, f_n stetig $\xRightarrow{\text{Sätze 1.60, 1.62}} f' \lambda_1$ -messbar

$|f_n(x)| = |f'(\xi)| \leq M = g(x) \xRightarrow{\text{Satz 1.68}} f' \lambda_1$ -integrierbar,

$$\begin{aligned} \int_a^b f' d\lambda_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{F(b + \frac{1}{n}) - F(a + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} - \frac{F(b) - F(a)}{\frac{1}{n}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{F(b + \frac{1}{n}) - F(b)}{\frac{1}{n}} - \frac{F(a + \frac{1}{n}) - F(a)}{\frac{1}{n}} \right] = F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Satz 1.70 (B. Levi³⁶)

Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$, $f_k : A \rightarrow [0, \infty)$ monoton wachsende Folge μ -integrierbarer Funktionen, für die deren Integralfolge $(\int_A f_k d\mu)_k$ beschränkt ist. Dann existiert $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ μ -f.ü. auf A , f ist μ -integrierbar, es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu = \int_A \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \int_A f d\mu.$$

Bemerkung : • Satz von der monotonen Konvergenz

• Monotonie wichtig, z.B. $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu] = [\mathbb{R}, \mathfrak{L}_1, \lambda_1]$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[0, n]}$

Folgerung 1.71 Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$, $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ μ -integrierbar mit $f_k(x) \geq 0$, sowie $\sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k d\mu < \infty$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$ μ -f.ü. auf A , f ist μ -integrierbar, es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \int_A f d\mu.$$

Beispiel : $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu] = [\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \nu]$ Zählmaß, $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ $\leadsto \int_{\Omega} f d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

Satz 1.72 (Lemma von Fatou³⁷)

Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$, $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ μ -integrierbarer Funktionen mit $f_k(x) \geq 0$ auf A . Es sei $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu < \infty$. Dann ist $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ μ -f.ü. endlich und μ -integrierbar auf A , es gilt

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu \geq \int_A \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu.$$

Existiert insbesondere $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ μ -f.ü. auf A , so ist f μ -integrierbar, sowie

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu \geq \int_A f d\mu.$$

³⁶Beppo Levi (* 14.5.1875 Turin † 28.8.1961 Rosario/Argentinien)

³⁷Pierre Joseph Louis Fatou (* 28.2.1878 Lorient/Frankreich † 10.8.1929 Pornichet/Frankreich)

1.3.3 Die Räume $L_p(A, \mu)$

Definition 1.73 Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$.

(i) Für $0 < p < \infty$ definiert man

$$\mathcal{L}_p(A, \mu) = \{f : A \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ } \mu\text{-messbar, } |f|^p \text{ } \mu\text{-integrierbar über } A\}$$

sowie

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p(A, \mu)} = \left(\int_A |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathcal{L}_p(A, \mu).$$

(ii) Für $p = \infty$ setzt man

$$\mathcal{L}_\infty(A, \mu) = \{f : A \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ } \mu\text{-messbar, } |f| \text{ } \mu\text{-f.ü. beschränkt auf } A\}$$

sowie

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\infty(A, \mu)} = \inf \{c > 0 : \mu(\{x \in A : |f(x)| > c\}) = 0\}, \quad f \in \mathcal{L}_\infty(A, \mu).$$

Bemerkung : (a) $f \in \mathcal{L}_\infty(A, \mu)$: $\text{ess sup}_{x \in A} |f(x)| := \inf_{\substack{\mathfrak{A} \ni N \subset A \\ \mu(N) = 0}} \sup_{x \in A \setminus N} |f(x)|$ *wesentliches Supremum*

Es gilt: $\|f\|_{\mathcal{L}_\infty(A, \mu)} = \text{ess sup}_{x \in A} |f(x)|$, *denn:*

$$(b) f \in \mathcal{L}_\infty(A, \mu) \curvearrowright \exists N \in \mathfrak{A}, N \subset A, \mu(N) = 0 : \|f\|_{\mathcal{L}_\infty(A, \mu)} = \sup_{x \in A \setminus N} |f(x)|:$$

Definition & (a) $\curvearrowright \forall k \in \mathbb{N} \exists N_k \in \mathfrak{A}, N_k \subset A, \mu(N_k) = 0 :$

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\infty(A, \mu)} \leq \sup_{x \in A \setminus N_k} |f(x)| < \|f\|_{\mathcal{L}_\infty(A, \mu)} + 2^{-k}$$

$$\curvearrowright \exists N := \bigcup_k N_k \in \mathfrak{A}, N \subset A, \mu(N) = 0:$$

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\infty(A, \mu)} = \text{ess sup}_{x \in A} |f(x)| \leq \sup_{x \in A \setminus N} |f(x)| \leq \sup_{x \in A \setminus N_k} |f(x)| < \|f\|_{\mathcal{L}_\infty(A, \mu)} + 2^{-k}$$

$$\xRightarrow[k \rightarrow \infty]{} \exists N \in \mathfrak{A}, N \subset A, \mu(N) = 0 : \|f\|_{\mathcal{L}_\infty(A, \mu)} = \text{ess sup}_{x \in A} |f(x)| = \sup_{x \in A \setminus N} |f(x)|$$

Problem: für $0 < p \leq \infty$ gilt $\|f\|_{\mathcal{L}_p(A, \mu)} = 0 \iff f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü. auf } A$, d.h. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_p(A, \mu)}$ keine Norm, sondern nur Halbnorm (bzw. Quasi-Halbnorm für $0 < p < 1$) $\dashrightarrow$ Ausweg: betrachten

$$\mathcal{N} = \{f : A \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ } \mu\text{-messbar, } f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü. auf } A\} \subset \mathcal{L}_p(A, \mu), \quad 0 < p \leq \infty$$

Teilraum $\curvearrowright$ können Quotientenraum bilden

$$L_p(A, \mu) := \mathcal{L}_p(A, \mu) / \mathcal{N} = \{[f] = f + \mathcal{N} : f \in \mathcal{L}_p(A, \mu)\}, \quad 0 < p \leq \infty$$

mit Äquivalenzklassen $[f]$, wobei für $g : A \rightarrow \mathbb{K}$ μ -messbar gilt

$$g \in [f] \iff f - g \in \mathcal{N} \iff f - g = 0 \quad \mu\text{-f.ü. in } A$$

$\leadsto \forall f, g \in [f] : \|f\|_{\mathcal{L}_p(A, \mu)} = \|g\|_{\mathcal{L}_p(A, \mu)}$, setzen

$$\|[f]\|_{L_p(A, \mu)} := \|g\|_{\mathcal{L}_p(A, \mu)} \quad \text{für ein } g \in \mathcal{L}_p(A, \mu), \quad 0 < p \leq \infty$$

$\leadsto \|[f]\|_{L_p(A, \mu)} = 0 \iff f \in \mathcal{N} \iff [f] = 0$

Vereinbarung: Man schreibt meist $f \in L_p(A, \mu)$ bzw. $\|f\|_p := \|f\|_{L_p(A, \mu)}$, $0 < p \leq \infty$, anstelle von $[f] \in L_p(A, \mu)$ bzw. $\|[f]\|_{L_p(A, \mu)}$, muss aber die entsprechende Interpretation (*Äquivalenzklassen statt Funktionen, Wahl eines Repräsentanten*) beachten

Beispiele : (a) $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu] = [\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \nu]$, $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, mit $g(n) =: g_n \leadsto g \sim (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge

$$\text{Bsp. nach Folg. 1.71} \leadsto \int_{\Omega} g \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \leadsto L_p(\mathbb{N}, \nu) = \ell_p(\mathbb{N})$$

(b) $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu] = [\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}_n, \lambda_n]$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $G \in \mathfrak{L}_n$

$$\leadsto L_p(G, \lambda_n) =: L_p(G), \quad \text{speziell: } L_p(\mathbb{R}^n, \lambda_n) = L_p(\mathbb{R}^n)$$

Erinnerung: $1 \leq p \leq \infty \leadsto p'$ gegeben durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 < p < \infty$, bzw. $p' = \begin{cases} \infty, & p = 1 \\ 1, & p = \infty \end{cases}$

Satz 1.74 (Hölder- und Minkowski-Ungleichung)

Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$.

(i) Seien $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p(A, \mu)$, $g \in L_{p'}(A, \mu)$. Dann ist $fg \in L_1(A, \mu)$ mit

$$\|fg\|_{L_1(A, \mu)} \leq \|f\|_{L_p(A, \mu)} \|g\|_{L_{p'}(A, \mu)}.$$

(ii) Seien $0 < p \leq \infty$, sowie $f, g \in L_p(A, \mu)$. Dann gilt $f + g \in L_p(A, \mu)$ sowie

$$\|f + g\|_{L_p(A, \mu)} \leq \|f\|_{L_p(A, \mu)} + \|g\|_{L_p(A, \mu)}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

bzw.

$$\|f + g\|_{L_p(A, \mu)}^p \leq \|f\|_{L_p(A, \mu)}^p + \|g\|_{L_p(A, \mu)}^p, \quad 0 < p \leq 1.$$

Beweis : zu (i): Messbarkeit von fg folgt aus Satz 1.60; o.B.d.A. $1 < p < \infty$, $f \not\equiv 0$, $g \not\equiv 0$, sowie $\|f\|_{L_p(A, \mu)} = \|g\|_{L_{p'}(A, \mu)} = 1$ (sonst Skalierung)

Lemma 1.25 $\leadsto |f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'} \quad \mu\text{-f.ü. in } A \xrightarrow{\text{Satz 1.65 \& Def. 1.73}} fg \text{ } \mu\text{-integrierbar, d.h. } fg \in L_1(A, \mu), \text{ mit}$

$$\int_A |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \leq \frac{1}{p} \underbrace{\int_A |f(x)|^p \, d\mu(x)}_{\|f\|_{L_p(A, \mu)}^p = 1} + \frac{1}{p'} \underbrace{\int_A |g(x)|^{p'} \, d\mu(x)}_{\|g\|_{L_{p'}(A, \mu)}^{p'} = 1} = 1 = \|f\|_{L_p(A, \mu)} \|g\|_{L_{p'}(A, \mu)}$$

zu (ii): Messbarkeit von $f + g$ folgt aus Satz 1.60; verwenden Lemma 1.29, ansonsten analog zum Beweis von Satz 1.27 und (i) $\square$

Folgerung 1.75 Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$, $0 < q \leq p \leq \infty$. Dann gilt

$$L_p(A, \mu) \hookrightarrow L_q(A, \mu) \quad \text{mit} \quad \|f\|_{L_q(A, \mu)} \leq \mu(A)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(A, \mu)}, \quad f \in L_p(A, \mu).$$

Beweis : o.B.d.A. $q < p$; $f \in L_p(A, \mu) \leadsto |f|^q \in L_r(A, \mu)$ mit $r = \frac{p}{q} > 1$; $g = \chi_A \in L_{r'}(A, \mu)$,

$$\|\chi_A\|_{L_{r'}(A, \mu)} = \left(\int_A d\mu \right)^{\frac{1}{r'}} = \mu(A)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Satz 1.74(i)}} \|f\|_{L_q(A, \mu)} &= \left(\int_A |f(x)|^q \chi_A(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \underbrace{\left(\int_A |f(x)|^{rq} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{rq}}}_{\|f\|_{L_p(A, \mu)}, p=rq} \underbrace{\left(\int_A \chi_A^{r'}(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{r'q}}}_{\|\chi_A\|_{L_{r'}(A, \mu)}^{1/q}} \\ &= \|f\|_{L_p(A, \mu)} \mu(A)^{\frac{1}{q}(1-\frac{q}{p})} = \|f\|_{L_p(A, \mu)} \mu(A)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

□

Satz 1.76 Seien $[\Omega, \mathfrak{A}, \mu]$ ein vollständiger σ -endlicher Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$, $1 \leq p \leq \infty$.

(i) $L_p(A, \mu)$ ist ein Banachraum.

(ii) Für $1 \leq p < \infty$ liegen die Treppenfunktionen dicht in $L_p(A, \mu)$.

Beweis : 1. Schritt: zu (i); nach Vorbemerkung (zu $\mathcal{L}_p(A, \mu)$ und $L_p(A, \mu)$ und entsprechenden Normen) ist $\|\cdot\|_{L_p(A, \mu)}$ eine Norm $\leadsto$ n.z.z.: Vollständigkeit, d.h. alle Cauchy-Folgen $(f_k)_k \subset L_p(A, \mu)$ mit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad \forall m > n \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_{L_p(A, \mu)} < \varepsilon$$

sind in $L_p(A, \mu)$ konvergent

zuerst $1 \leq p < \infty$, verwenden Satz 1.5: sei $(f_k)_k \subset L_p(A, \mu)$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(A, \mu)} < \infty \quad (11)$$

$$\text{z.z.: } \exists f \in L_p(A, \mu) : \left\| f - \sum_{k=1}^m f_k \right\|_{L_p(A, \mu)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

wollen Folgerung 1.75 mit $q = 1$ anwenden $\leadsto$ nur für $\mu(A) < \infty$ möglich $\leadsto$ betrachten Zerlegung $A = \bigcup_k A_k$ mit $A_k \in \mathfrak{A}$, $\mu(A_k) < \infty$ (da μ σ -endlich)

$$\xrightarrow{\text{Folg. 1.75}} \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\|_{L_1(A_k, \mu)} \leq \underbrace{\mu(A_k)^{\frac{1}{p'}}}_{=: c_k} \|f_n\|_{L_p(A_k, \mu)} \leq c_k \|f_n\|_{L_p(A, \mu)}$$

$$\leadsto \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} : \int_{A_k} \sum_{n=1}^m |f_n(x)| d\mu(x) \leq c_k \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L_p(A, \mu)} < \infty \quad (11)$$

$$\xrightarrow{\text{Folg. 1.71}} \exists \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| =: g(x) \quad \mu\text{-f.ü. und ist } \mu\text{-integrierbar auf } A_k, k \in \mathbb{N}, \text{ mit}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_k} |f_n(x)| d\mu(x) = \int_{A_k} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| d\mu(x) = \int_{A_k} g(x) d\mu(x)$$

$$\xrightarrow{A = \bigcup_k A_k} \exists g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \quad \mu\text{-f.ü. auf } A \xrightarrow{\text{Satz 1.65}} \exists f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \mu\text{-f.ü. auf } A, \mu\text{-integrierbar}$$

nach Satz 1.74(ii) gilt wegen $p \geq 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{n=1}^m |f_n| \right\|_{L_p(A, \mu)} \leq \sum_{n=1}^m \|f_n\|_{L_p(A, \mu)} < \infty \quad (11)$$

$\xRightarrow{\text{Folg. 1.71}} \exists \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \right)^p = g(x)^p \text{ } \mu\text{-f.ü.}, \text{ } \mu\text{-integrierbar auf } A, \text{ mit}$

$$\int_A g(x)^p d\mu(x) = \int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \right)^p d\mu(x) < \infty$$

$|f(x)|^p \leq g(x)^p \text{ } \mu\text{-f.ü.} \text{ \& } g^p \text{ } \mu\text{-integrierbar über } A \xRightarrow{\text{Satz 1.65(v)}} |f|^p \text{ } \mu\text{-integrierbar über } A,$

$$\|f\|_{L_p(A, \mu)}^p = \int_A |f(x)|^p d\mu(x) \leq \int_A g(x)^p d\mu(x) < \infty$$

$\leadsto f \in L_p(A, \mu); \text{ außerdem: } |f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x)|^p \leq \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(x)| \right)^p \leq g(x)^p, \text{ } g^p \text{ } \mu\text{-integrierbar über } A$

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\text{Satz 1.68/Lebesgue}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^m f_n \right\|_{L_p(A, \mu)}^p &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A \left| f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x) \right|^p d\mu(x) \\ &= \int_A \underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x) \right|^p}_{=0, \mu\text{-f.ü.}} d\mu(x) = 0 \end{aligned}$$

2. Schritt: Vollständigkeit für $p = \infty$; sei $(f_j)_j \subset L_{\infty}(A, \mu)$ mit $\|f_j - f_k\|_{L_{\infty}(A, \mu)} \xrightarrow{k, j \rightarrow \infty} 0$

$$\|f_j - f_k\|_{L_{\infty}(A, \mu)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in A} |f_j(x) - f_k(x)| = \sup_{A \setminus N_{jk}} |f_j(x) - f_k(x)| \text{ für passendes } N_{jk} \in \mathfrak{A}, \mu(N_{jk}) = 0$$

sei $N := \bigcup_{j, k \in \mathbb{N}} N_{jk} \leadsto N \in \mathfrak{A}, \mu(N) = 0$

$$\leadsto \|f_j - f_k\|_{L_{\infty}(A, \mu)} \leq \sup_{A \setminus N} |f_j(x) - f_k(x)| \leq \sup_{N_{jk} \subset N} |f_j(x) - f_k(x)| = \|f_j - f_k\|_{L_{\infty}(A, \mu)}$$

$\leadsto \|f_j - f_k\|_{L_{\infty}(A, \mu)} = \sup_{A \setminus N} |f_j(x) - f_k(x)| \leadsto (f_j)_j \text{ Cauchyfolge in } B(A \setminus N, \mathbb{K}) = B(A \setminus N)$

$$\xRightarrow{\text{Satz 1.6}} \exists \tilde{f} \in B(A \setminus N) : \|f_j - \tilde{f}\|_{L_{\infty}(A, \mu)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \text{ setzen } f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & x \in A \setminus N \\ \text{beliebig}, & x \in N \end{cases}$$

$\leadsto f \in L_{\infty}(A, \mu) \text{ mit } \|f_j - f\|_{L_{\infty}(A, \mu)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

3. Schritt: zu (ii), Dichtheit der Treppenfunktionen für $p = 1$

$$\begin{aligned} f \in L_1(A, \mu) &\xRightarrow{\text{Def. 1.63, 1.73}} \exists (s_k)_k \text{ Treppenfunktionen: } s_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f \text{ } \mu\text{-f.ü.}, \int_A |s_k - s_l| d\mu \xrightarrow{k, l \rightarrow \infty} 0, \\ \int_A f d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A s_k d\mu \leadsto \lim_{m \rightarrow \infty} |s_k(x) - s_m(x)| = |s_k(x) - f(x)| \text{ } \mu\text{-f.ü.}, |s_k - f| \in L_1(A, \mu), \text{ d.h.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f - s_k\|_{L_1(A, \mu)} &= \int_A |f - s_k| d\mu = \int_A \lim_{m \rightarrow \infty} |s_m - s_k| d\mu \\ &= \int_A \liminf_{m \rightarrow \infty} |s_m - s_k| d\mu \stackrel{\text{Satz 1.72}}{\leq} \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_A |s_m - s_k| d\mu \\ &< \varepsilon \text{ für } k \geq k_0(\varepsilon) \end{aligned}$$

4. Schritt: zu (ii), Dichtheit der Treppenfunktionen für $p > 1$

seien $f \in L_p(A, \mu)$, $\theta \in (0, 1)$, $A_{\theta} = \{x \in A : \theta \leq |f(x)| \leq \theta^{-1}\} \in \mathfrak{A} \leadsto \mu(A \setminus A_{\theta}) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$,

$$\|f\|_{L_p(A, \mu)}^p = \int_A |f|^p d\mu \geq \int_{A_{\theta}} |f|^p d\mu \geq \theta^p \mu(A_{\theta}) \leadsto \mu(A_{\theta}) < \infty, \theta \chi_{A_{\theta}} \in L_p(A, \mu)$$

$\leadsto \chi_{A_\theta} \in L_1(A, \mu), \chi_{A_\theta} |f| \leq \theta^{-1} \chi_{A_\theta} \leadsto \chi_{A_\theta} f \in L_1(A, \mu) \xrightarrow{\text{3. Schritt}} \exists (s_k^\theta)_k$ Treppenfunktionen:

$$\left\| \chi_{A_\theta} f - s_k^\theta \right\|_{L_1(A_\theta, \mu)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad s_k^\theta \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \chi_{A_\theta} f \quad \mu\text{-f.ü. auf } A_\theta \quad (12)$$

$$\text{setzen } \sigma_k^\theta(x) := \begin{cases} s_k^\theta(x), & x \in A_\theta \wedge |s_k^\theta(x)| \leq \frac{2}{\theta} \\ \frac{2}{\theta} \frac{s_k^\theta(x)}{|s_k^\theta(x)|}, & x \in A_\theta \wedge |s_k^\theta(x)| > \frac{2}{\theta} \\ 0, & x \in A \setminus A_\theta \end{cases} \quad \text{Treppenfunktion, } |\sigma_k^\theta(x)| \leq \frac{2}{\theta}, \quad x \in A$$

sei $x \in A_\theta$ mit $|s_k^\theta(x)| > 2\theta^{-1} \xrightarrow{|f(x)| \leq \theta^{-1}} |s_k^\theta(x)| > \theta^{-1} + |f(x)| \leadsto |s_k^\theta(x) - f(x)| \geq |s_k^\theta(x)| - |f(x)| > \theta^{-1}$

$$\leadsto |\sigma_k^\theta(x) - f(x)| \leq \underbrace{|f(x)|}_{\leq \theta^{-1}} + \underbrace{|\sigma_k^\theta(x)|}_{\leq 2\theta^{-1}} \leq 3\theta^{-1} < 3|s_k^\theta(x) - f(x)| \quad x \in A_\theta = 3|s_k^\theta(x) - \chi_{A_\theta} f(x)|$$

$$\xrightarrow{(12)} \|\sigma_k^\theta - \chi_{A_\theta} f\|_{L_1(A, \mu)} = \|\sigma_k^\theta - \chi_{A_\theta} f\|_{L_1(A_\theta, \mu)} \leq 3 \left\| \chi_{A_\theta} f - s_k^\theta \right\|_{L_1(A_\theta, \mu)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \leadsto \|f - \sigma_k^\theta\|_{L_p(A, \mu)}^p &= \int_A |f(x) - \sigma_k^\theta(x)|^p d\mu(x) \\ &= \int_{A \setminus A_\theta} |f(x) - \underbrace{\sigma_k^\theta(x)}_0|^p d\mu(x) + \int_{A_\theta} \underbrace{|\chi_{A_\theta} f(x) - \sigma_k^\theta(x)|^{p-1}}_{\leq \frac{3}{\theta}} |f(x) - \sigma_k^\theta(x)| d\mu(x) \\ &\leq \underbrace{\int_{A \setminus A_\theta} |f(x)|^p d\mu(x)}_{< \varepsilon, \theta < \theta_0(\varepsilon), \mu(A \setminus A_\theta) \rightarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{3}{\theta}\right)^{p-1} \|\sigma_k^\theta - \chi_{A_\theta} f\|_{L_1(A, \mu)}}_{< \varepsilon, k \geq k_0(\theta_0, \varepsilon)} < 2\varepsilon \quad \text{für } k \geq k_0 \end{aligned}$$

da $\int_{A \setminus A_\theta} |f(x)|^p d\mu(x) = \int_A |f(x)|^p \chi_{A \setminus A_\theta}(x) d\mu(x), \quad |f|^p \chi_{A \setminus A_\theta} \leq |f|^p$ μ -integrierbare Majorante

$$\xrightarrow{\text{Satz 1.68/Lebesgue}} \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{A \setminus A_\theta} |f(x)|^p d\mu(x) = \int_A |f(x)|^p \underbrace{\lim_{\theta \rightarrow 0} \chi_{A \setminus A_\theta}(x)}_{=0, \mu\text{-f.ü.}} d\mu(x) = 0 \quad \square$$

Bezeichnung: sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *finit* (in Ω), falls $\text{supp } f$ beschränkt ist, $\text{supp } f \subsetneq \Omega$

Satz 1.77 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$.

(i) Die Menge der finiten Treppenfunktionen ist dicht in $L_p(\Omega)$.

(ii) Die Menge der finiten und stetigen Funktionen ist dicht in $L_p(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L_p(\Omega)$.

(iii) $L_p(\Omega)$ ist separabel und $\dim L_p(\Omega) = \infty$.

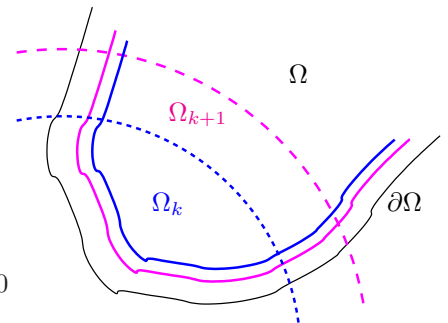
Beweis: 1. Schritt: wählen spezielle Überdeckung von Ω :

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega : |x| < k, \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\} \subset \Omega, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\leadsto \overline{\Omega_k} \subset \Omega_{k+1}, \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k = \Omega$$

$$\text{sei } f \in L_p(\Omega) \xrightarrow{\text{Folg. 1.67(ii)}} \int_\Omega |f(x)|^p dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} |f(x)|^p dx$$

$$\leadsto \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |f(x)|^p dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff \int_\Omega |f(x) - \underbrace{f(x)\chi_{\Omega_k}(x)}_{g_k, \text{finit}}|^p dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$



$\leadsto \exists (g_k)_k \subset L_p(\Omega)$, $\text{supp } g_k \subset \overline{\Omega_k} \subset \Omega$ **fini**: $\|f - g_k\|_{L_p(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$
 $f \in L_p(\Omega) \leadsto g_k \in L_p(\Omega_k) \xrightarrow[\text{Satz 1.76(ii)}]{} \exists (s_j^k)_j \subset L_p(\Omega_k)$ **Treppenfunktionen**, $\text{supp } s_j^k \subset \overline{\Omega_k} \subset \Omega_{k+1}$:
 $\|g_k - s_j^k\|_{L_p(\Omega)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \leadsto$ **finite Treppenfunktionen dicht in $L_p(\Omega)$**

2. Schritt: sei $f \in L_p(\Omega) \xRightarrow{(i)} \text{o.B.d.A. } f(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}$ **finite Treppenfunktion**, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_k \in \mathbb{K}$, $A_k \in \mathfrak{L}_n$
 mit $\overline{A_k} \subset \text{supp } f \subset \Omega$, $k = 1, \dots, m \xrightarrow[\text{endliche Summe, Linearität}]{} \text{o.B.d.A. } f = \chi_A$, $A \in \mathfrak{L}_n$, $\overline{A} \subset \Omega$

$A \in \mathfrak{L}_n \xrightarrow[\text{Satz 1.57(iv)}]{} \exists B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ **offen**: $A \subset B_\varepsilon \subset \overline{B_\varepsilon} \subset \Omega$, $\lambda_n(B_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
 $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ **offen** $\xrightarrow[\text{Lemma 1.54(ii)}]{} \exists (Q_j^\varepsilon)_j$ **offene Quader**: $B_\varepsilon = \bigcup_j Q_j^\varepsilon \leadsto$ **approximieren χ_Q für ein $Q \in \{Q_j^\varepsilon\}_{j \in \mathbb{N}}$**
 sei Q **offener Quader**, $\overline{Q} \subset \Omega \xrightarrow[\text{Lemma 1.49}]{} \exists \varphi_h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: $0 \leq \varphi_h \leq 1$, $\varphi_h(x) = 1$, $x \in \overline{Q}$, $\text{supp } \varphi_h \subset \overline{Q_h}$,
 wobei $\overline{Q_h} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \overline{Q}) \leq h\}$, $h > 0 \leadsto \overline{Q} \subset \overline{Q_h} \subset \Omega$ für $0 < h \leq h_0$, $\lambda_n(\overline{Q_h} \setminus Q) \leq ch^n \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

$$\int_{\Omega} |\chi_Q(x) - \varphi_h(x)|^p dx = \int_{\overline{Q_h} \setminus Q} \underbrace{\varphi_h(x)^p}_{\leq 1} dx \leq \lambda_n(\overline{Q_h} \setminus Q) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \leadsto C_0^\infty(\Omega) \text{ dicht in } L_p(\Omega)$$

3. Schritt: sei $F = \text{span} \left\{ \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{Q_j}, Q_j \text{ offene Würfel}, \overline{Q_j} \subset \Omega, \alpha_j \in \mathbb{K}, m \in \mathbb{N} \right\} \leadsto F \subset L_p(\Omega)$,
 $\dim F = \infty \leadsto \dim L_p(\Omega) = \infty$

$\xRightarrow{(i), (ii)} \overline{F} = L_p(\Omega)$, d.h. F **dicht in $L_p(\Omega)$** ; approximieren F durch

$$F_{\mathbb{Q}} = \text{span} \left\{ \sum_{j=1}^m (\alpha_j + i\beta_j) \chi_{R_j}, R_j = \bigtimes_{k=1}^n (c_k, d_k) \subset \Omega, c_k, d_k, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

$\leadsto \overline{F_{\mathbb{Q}}} = L_p(\Omega)$, $F_{\mathbb{Q}}$ **abzählbar** $\leadsto L_p(\Omega)$ **separabel** □

Bemerkung :

- $L_\infty(\Omega)$ **nicht separabel**
- $C_0^\infty(\Omega)$ **nicht dicht in $L_\infty(\Omega)$** , z.B. $f \equiv 1 \in L_\infty(\Omega)$.

Wiederholung aus der Maßtheorie:

Satz 1.78 (Fubini³⁸)

Seien $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{K}$ λ_{n+m} -**messbar**, $f = f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, **und es existiere eines der Integrale**

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x, y)| d(x, y), \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| dy \right) dx, \quad I_3 = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dx \right) dy.$$

Dann gelten

(i) $f(\cdot, y) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ **für λ_m -f.a. $y \in \mathbb{R}^m$** , $f(x, \cdot) \in L_1(\mathbb{R}^m)$ **für λ_n -f.a. $x \in \mathbb{R}^n$**

(ii) $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y) dy \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot) dx \in L_1(\mathbb{R}^m)$

(iii) $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x, y)| d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dx \right) dy$

(iv) $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \right) dy$

³⁸Guido Fubini (* 19.1.1879 Venedig † 6.6.1943 New York)

Koordinatentransformation: $\Omega \subset \mathbb{R}^n \sim (x_1, \dots, x_n) \longleftrightarrow \tilde{\Omega} \sim (y_1, \dots, y_n)$

speziell: $y_j = \Phi_j(x) = \Phi_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, n$, $\tilde{\Omega} = \Phi(\Omega)$, $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$

↪ betrachten Jacobi³⁹- bzw. Funktionaldeterminante in $x^0 \in \Omega$

$$\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x^0) = \det \mathcal{J}(\Phi, x^0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$

Satz 1.79 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: \Omega \rightarrow \Phi(\Omega)$ ein C^1 -Diffeomorphismus, d.h. $\Phi_j \in C^1(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$, Φ injektiv, $\det \mathcal{J}(\Phi, x) \neq 0$, $x \in \Omega$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$. Dann existiert $\int_{\Phi(\Omega)} f(y) dy$ genau dann, wenn $\int_{\Omega} (f \circ \Phi)(x) |\det \mathcal{J}(\Phi, x)| dx$ existiert, und es gilt

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(y) dy = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |\det \mathcal{J}(\Phi, x)| dx.$$

Beispiel : Oberflächeneinhalt und Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$

$K_n = K_n(0)$... n -dimensionale Einheitskugel, $\omega_n = \partial K_n$... Sphäre, Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel

$$\begin{array}{rcll} \text{verallgemeinerte Kugelkoordinaten} & : & \begin{array}{l} x_1 = r \cos \varphi \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{n-2} \\ x_2 = r \sin \varphi \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{n-2} \\ x_3 = r \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{n-2} \\ \vdots \\ x_{n-1} = r \cos \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2} \\ x_n = r \cos \vartheta_{n-2} \end{array} \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{x = \Phi_n(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2})} \end{array}$$

$$\bar{\Pi} : 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta_j \leq \pi, \quad j = 1, \dots, n-2$$

$$\left| \frac{\partial(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right| = |\det \mathcal{J}(\Phi_n, (r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}))| = r^{n-1} \sin \vartheta_1 (\sin \vartheta_2)^2 \dots (\sin \vartheta_{n-2})^{n-2}$$

↪ $\Phi_n: \Omega := (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0 \wedge x_2 = 0\} =: \Phi_n(\Omega)$
 C^1 -Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} |\omega_n| &= \int_{\omega_n} d\sigma = \int_{\bar{\Pi}|_{r=1}} \left| \frac{\partial(1, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right| d(\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \underbrace{\sin \vartheta_1 (\sin \vartheta_2)^2 \dots (\sin \vartheta_{n-2})^{n-2} d\vartheta_{n-2} \dots d\vartheta_1 d\varphi}_{d\omega} \\ |K_n| &= \int_{K_n} dx = \int_{\bar{\Pi}} \left| \frac{\partial(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right| d(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}) = \int_0^1 \int_{\omega_n} r^{n-1} d\omega dr \\ &= |\omega_n| \underbrace{\int_0^1 r^{n-1} dr}_{\frac{1}{n}} = \frac{|\omega_n|}{n} \end{aligned}$$

³⁹Carl Gustav Jacob Jacobi (* 10.12.1804 Potsdam † 18.2.1851 Berlin)

Lemma 1.80 Seien $n \geq 2$ und $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n$ die n -dimensionale Einheitskugel mit $\omega_n = \partial K_n$. Für ihr Volumen $|K_n|$ und den Oberflächeninhalt $|\omega_n|$ gelten

$$|\omega_n| = \frac{2 \sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \text{und} \quad |K_n| = \frac{2 \sqrt{\pi}^n}{n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Beweis : früher: $\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt$, $y > 0$, $\Gamma(m+1) = m!$, $m \in \mathbb{N}$

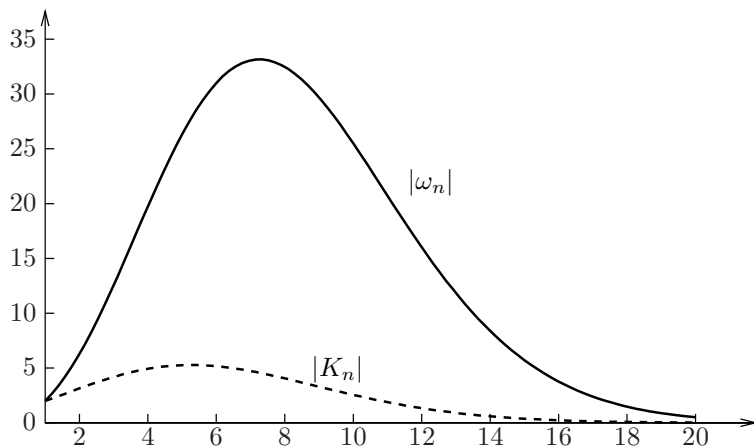
berechnen $I_n := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx$ direkt und mit Sätzen 1.78, 1.79:

$$\curvearrowright I_n = \int_0^\infty \int_{\omega_n} e^{-r^2} \underbrace{r^{n-1} d\omega}_{dx} dr = |\omega_n| \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr \stackrel{u=r^2}{=} \frac{|\omega_n|}{2} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du = \frac{|\omega_n|}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \quad (13)$$

andererseits ist $I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} d(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{Satz 1.78}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right)^n = I_1^n \stackrel{(13)}{\implies} |\omega_n| = \frac{2I_1^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

bekannt: $|\omega_2| = 2\pi \curvearrowright I_1^2 = \frac{|\omega_2|}{2} \Gamma(1) = \pi \curvearrowright I_1 = \sqrt{\pi} \curvearrowright |\omega_n| = \frac{2 \sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$; vorher: $|K_n| = \frac{|\omega_n|}{n}$ $\square$

Bemerkung : $n=3 \curvearrowright 4\pi = |\omega_3| = \frac{2 \sqrt{\pi}^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \iff \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \iff \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$



$$|\omega_n| = \begin{cases} \frac{2 \pi^m}{(m-1)!}, & n = 2m \\ \frac{2^{m+1} \pi^m}{(2m-1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\omega_1| &= 2, & |\omega_2| &= 2\pi, \\ |\omega_3| &= 4\pi, & |\omega_4| &= 2\pi^2, \\ |\omega_5| &= \frac{8}{3}\pi^2, & |\omega_6| &= \pi^3, \\ |\omega_7| &= \frac{16}{15}\pi^3, & |\omega_8| &= \frac{1}{3}\pi^4, \dots \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\omega_n| = 0, \quad |\omega_{\max}| = |\omega_7|$$

$$|K_n| = \begin{cases} \frac{\pi^m}{m!}, & n = 2m \\ \frac{2^{m+1} \pi^m}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases} \quad \curvearrowright \quad \begin{aligned} |K_1| &= 2, & |K_2| &= \pi, & |K_3| &= \frac{4}{3}\pi, & |K_4| &= \frac{1}{2}\pi^2, \\ |K_5| &= \frac{8}{15}\pi^2, & |K_6| &= \frac{1}{6}\pi^3, & |K_7| &= \frac{16}{105}\pi^3, & |K_8| &= \frac{1}{24}\pi^4 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |K_n| = 0, \quad |K_{\max}| = |K_5|$$

1.3.4 Faltung und Glättung

Satz 1.81 Seien $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $T_h f(x) = f(x+h)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(i) Es gilt $T_h : L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$ mit $\|T_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$, $h \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|T_h f - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = 0$

Bemerkung : (ii) $\sim$ Stetigkeit im p -ten Mittel, $T_h \dots$ Translationsoperator

Beweis :

□

Bemerkung : $(T_h)_{h \in \mathbb{R}^n}$ 'stark stetige Halbgruppe von Operatoren':

$$T_{h_1}T_{h_2} = T_{h_1+h_2}, \quad h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{|h| \rightarrow 0} T_h f = f$$

Definition 1.82 Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ λ_n -messbare Funktionen, und es existiere $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$ für λ_n -f.a. $x \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

Faltung von f und g .

Erinnerung: $1 \leq p < \infty \leadsto p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p = 1 \end{cases}$

Satz 1.83 Seien $f, g, k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ λ_n -messbar.

(i) Die Faltung ist linear und symmetrisch, d.h. falls $f * g$ existiert, so auch $g * f$, es gilt $f * g = g * f$. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert stets $f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$. Falls zusätzlich $f * k$ existiert, so existiert $f * (g + k)$ mit $f * (g + k) = f * g + f * k$.

(ii) Seien $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert $f * g \in \overline{C}(\mathbb{R}^n)$, es gilt

$$\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

(iii) Für $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ existiert $f * g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, mit

$$\|f * g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

(iv) Seien $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ oder $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$. Dann gelten

$$\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g} \quad \text{sowie} \quad T_h(f * g) = (T_h f) * g = f * (T_h g).$$

Bemerkung : Eigenschaft (iii) für $p = 1 \leadsto L_1(\mathbb{R}^n)$ 'Faltungsalgebra':

$$f, g \in L_1(\mathbb{R}^n) \leadsto f * g \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad \|f * g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

Beweis : zu (i): folgt aus Koordinatentransformation, Substitutionsregel, Linearität des Integrals

zu (ii): Ungleichung folgt aus Hölder-Ungleichung (Satz 1.74); zu $f * g \in \overline{C}(\mathbb{R}^n)$, d.h. gleichmäßig stetig:

$$\begin{aligned}
 |(f * g)(x + h) - (f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + h - y) - f(x - y)| |g(y)| \, dy \\
 &\stackrel{z = x - y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |f(z + h) - f(z)| |g(x - z)| \, dz \\
 &\stackrel{\text{Satz 1.74}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z + h) - f(z)|^p \, dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x - z)|^{p'} \, dz \right)^{\frac{1}{p'}} \\
 &= \underbrace{\|T_h f - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}_{\xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0, \text{ Satz 1.81}} \|g\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \quad \text{für } |h| \leq h_0 = h_0(\varepsilon)
 \end{aligned}$$

$$\text{zu (iii): } p = 1 \quad \curvearrowright \quad f, g \in L_1(\mathbb{R}^n) \quad \curvearrowright \quad \exists \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)g(y)| \, dx \right)}_{|g(y)| \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}} \, dy = \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

$$\xrightarrow{\text{Satz 1.78/Fubini}} \exists \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y)g(y) \, dy \quad \text{für } \lambda_n\text{-f.a. } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\begin{aligned}
 \|f * g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, dy}_{(f * g)(x)} \right| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)g(y)| \, dy \right) \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)g(y)| \, dx \right) \, dy = \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}
 \end{aligned}$$

sei jetzt $1 < p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
 |(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)g(y)| \, dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| |g(y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|^{\frac{1}{p'}} \, dy \\
 &\stackrel{\text{Satz 1.74}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|^p |g(y)| \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \, dy \right)^{\frac{1}{p'}}}_{\|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{1/p'}}
 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
 \|f * g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p &\leq \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|^p |g(y)| \, dy \, dx \\
 &\stackrel{\text{Satz 1.78}}{=} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|^p |g(y)| \, dx}_{|g(y)| \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p} \, dy \\
 &= \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p'} + 1} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p \stackrel{\frac{p}{p'} + 1 = p}{=} \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^p \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p
 \end{aligned}$$

zu (iv): sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\text{supp } f + \text{supp } g} \quad \curvearrowright \quad \exists \delta > 0 : K_\delta(x) \cap \overline{\text{supp } f + \text{supp } g} = \emptyset$
 $\curvearrowright \quad \forall y \in K_\delta(x) : y \notin \text{supp } f + \text{supp } g \xrightarrow[y = (y - z) + z]{\text{}} \quad \forall y \in K_\delta(x) \quad \forall z \in \text{supp } g : y - z \notin \text{supp } f$
 $\curvearrowright \quad \forall y \in K_\delta(x) \quad \forall z \in \text{supp } g : f(y - z) = 0$

$$\curvearrowright \quad \forall y \in K_\delta(x) : (f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y - z)g(z) \, dz = \int_{\text{supp } g} \underbrace{f(y - z)}_0 g(z) \, dz = 0 \xrightarrow{x \in K_\delta(x)} x \notin \text{supp } (f * g)$$

□

Satz 1.84 (i) Seien $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \varphi$ kompakt. Dann gilt

$$f * \varphi \in \overline{C}^m(\mathbb{R}^n) \quad \text{sowie} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq m: \quad D^\alpha(f * \varphi) = f * D^\alpha \varphi.$$

(ii) Seien $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$, $\varphi_h(x) = h^{-n} \varphi(\frac{x}{h})$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$,

$$\|f - f * \varphi_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

sowie für $g \in \overline{C}(\mathbb{R}^n)$

$$\|g - g * \varphi_h\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Beweis: zu (i): $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \varphi$ kompakt $\xRightarrow{\text{Satz 1.77(ii)}} D^\alpha \varphi \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leq m$

$\xRightarrow{\text{Satz 1.83}} \exists f * D^\alpha \varphi \in \overline{C}(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leq m$

g.z.z.: $\frac{\partial}{\partial x_j}(f * \varphi)$ existiert mit $\frac{\partial}{\partial x_j}(f * \varphi) = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$, dann: Iteration

$\text{supp } \varphi$ kompakt $\leadsto \exists R > 0: \text{supp } \varphi \subset K_R(0)$

o.B.d.A. seien $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < h < 1$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f * \varphi)(x + h e_j) - (f * \varphi)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{\varphi(x + h e_j - y) - \varphi(x - y)}{h}}_{=0, |x-y| \geq R+1} f(y) dy \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{K_{R+1}(x)} \underbrace{\frac{\varphi(x + h e_j - y) - \varphi(x - y)}{h}}_{|\cdot| \leq \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\|_\infty} f(y) dy \\ &\xRightarrow{\text{Hölder}} \int_{K_{R+1}(x)} |\cdot| dy \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\|_\infty |K_{R+1}|^{1/p'} \end{aligned}$$

und damit nach Satz 1.68/Lebesgue

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + h e_j - y) - \varphi(x - y)}{h} f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x - y) f(y) dy = \left(f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)(x) \end{aligned}$$

$$\leadsto \frac{\partial(f * \varphi)}{\partial x_j}(x) \text{ existiert, } \frac{\partial(f * \varphi)}{\partial x_j}(x) = \left(f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

zu (ii): seien $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $\varepsilon > 0$

$$\xRightarrow{\text{Satz 1.81}} \exists \delta > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, |y| \leq \delta: \|f - f(\cdot - y)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \quad (14)$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f * \varphi_h(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)| |\varphi_h(y)|^{\frac{1}{p}} |\varphi_h(y)|^{\frac{1}{p'}} dy \\ &\stackrel{\text{Satz 1.74}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)|^p |\varphi_h(y)| dy \right)^{\frac{1}{p}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_h(y)| dy \right)^{\frac{1}{p'}}}_{\|\varphi_h\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p'}} = \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p'}}} \\ &\leadsto \|f - f * \varphi_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)|^p |\varphi_h(y)| dy dx \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p'}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_h(y)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)|^p dx}_{\|T_{-y}f - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p} dy \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p'}} \\
&= \int_{|y| < \delta} |\varphi_h(y)| \underbrace{\|T_{-y}f - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p}_{< \varepsilon^p, (14)} dy \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p'}} \\
&\quad + \int_{|y| > \delta} |\varphi_h(y)| \underbrace{\|T_{-y}f - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p}_{\leq 2^p \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p} dy \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p'}} \\
&< \varepsilon^p \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^p + 2^p \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p'}} \int_{|y| > \delta} |\varphi_h(y)| dy \\
&\stackrel{y = hz}{=} \varepsilon^p \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^p + 2^p \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p'}} \underbrace{\int_{|z| > \delta h^{-1}} |\varphi(z)| dz}_{< \varepsilon^p \text{ für } h < h_0(\varepsilon, \delta), \varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)} \\
&< C \varepsilon^p \text{ für } h < h_0(\varepsilon)
\end{aligned}$$

sei $g \in \overline{C}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0 \leadsto \exists \delta > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, |y| < \delta : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x) - g(x-y)| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\leadsto \|g - g * \varphi_h\|_\infty &\leq \int_{|y| < \delta} \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x) - g(x-y)|}_{< \varepsilon} |\varphi_h(y)| dy + \int_{|y| \geq \delta} \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x) - g(x-y)|}_{\leq 2\|g\|_\infty} |\varphi_h(y)| dy \\
&< \varepsilon \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + 2\|g\|_\infty \underbrace{\int_{|z| > \delta h^{-1}} |\varphi(z)| dz}_{< \varepsilon \text{ für } h < h_0(\varepsilon, \delta), \text{ da } \varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)} \\
&< C' \varepsilon \text{ für } h < h_0(\varepsilon)
\end{aligned}$$

□

Sobolev⁴⁰ches Mittelungsverfahren / Friedrichs⁴¹ches Glättungsverfahren
zur Erinnerung:

$$\omega(x) = \begin{cases} c e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h^n} \omega\left(\frac{x}{h}\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad h > 0$$

mit

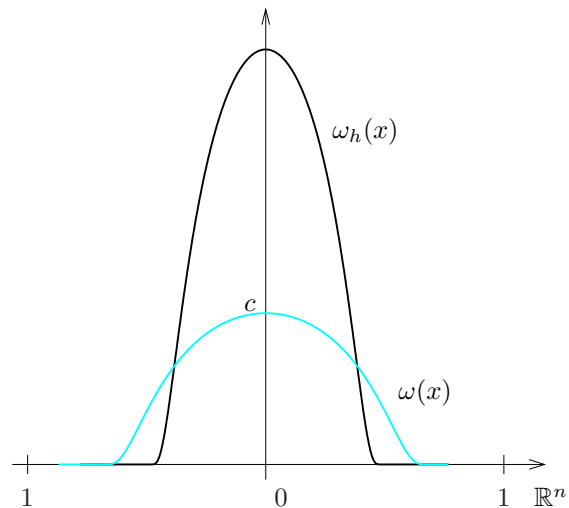
$$\text{supp } \omega = \overline{K_1(0)}, \quad \text{supp } \omega_h = \overline{K_h(0)}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(y) dy = 1$$

sei $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. setzen

$$f_h(x) = (f * \omega_h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \omega_h(y) dy = \int_{|z| \leq 1} f(x-hz) \omega(z) dz, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad h > 0 \quad (15)$$



⁴⁰Sergei Lvovich Sobolev (* 6.10.1908 St. Petersburg † 3.1.1989 Leningrad)

⁴¹Kurt Otto Friedrichs (* 28.9.1901 Kiel † 31.12.1982 New York)

Folgerung 1.85 Seien $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, f_h gegeben durch (15), $h > 0$. Dann gelten

- (i) $f_h \in L_p(\mathbb{R}^n) \cap \overline{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|f_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$
- (ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \|f - f_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = 0$
- (iii) $f \in \overline{C}(\mathbb{R}^n)$ impliziert $\|f - f_h\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, $f_h \in \overline{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis : folgt aus Definition (15) und Sätzen 1.83, 1.84 □

Bemerkung : spezielle Gestalt von ω nicht notwendig, nur $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1$, $\omega \geq 0$

Folgerung 1.86 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\Omega)$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$

- (i) $\text{supp } \tilde{f}_h \subset \overline{\Omega + K_h(0)}$, $f_h = \tilde{f}_h|_\Omega \in L_p(\Omega) \cap \overline{C}(\Omega)$, $\lim_{h \rightarrow 0} \|f - f_h\|_{L_p(\Omega)} = 0$
- (ii) Falls $\text{supp } f \subset \Omega$ kompakt ist, so existiert ein $h_0 > 0$, so dass $f_h \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 < h < h_0$, sowie $\|f - f_h\|_{L_p(\Omega)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

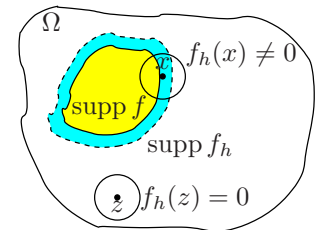
Beweis : zu (ii): sei $f \in L_p(\Omega)$, $\text{supp } f \subset \Omega$ kompakt, $x \in \Omega$

$$\tilde{f}_h(x) = \int_{|x-y| \leq h} \omega_h(x-y) \tilde{f}(y) dy$$

$$\text{dist}(x, \text{supp } f) \leq h \xrightarrow{\text{i.a.}} \tilde{f}_h(x) \neq 0, \quad \text{dist}(z, \text{supp } f) > h \leadsto \tilde{f}_h(z) = 0$$

$$\leadsto \text{supp } \tilde{f}_h \subset \{z \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(z, \text{supp } f) \leq h\}$$

$$\text{dist}(\text{supp } f, \partial\Omega) > 0 \leadsto \text{wählen } h_0 > 0 \text{ so, dass } \text{supp } \tilde{f}_h \subset \Omega, \quad 0 < h \leq h_0 \leadsto \text{supp } f_h \text{ kompakt} \quad \square$$



Bemerkung : mit diesem Verfahren $\leadsto$ alternative Beweise von Lemma 1.49 und Satz 1.77(ii) möglich:

seien $\Gamma \subset \Omega$, Γ kompakt, Ω offen, $\Gamma_h = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\Gamma, y) < h\}$, $h > 0$

$$\xrightarrow{\text{Sobolev-Mitt.}} (\chi_{\Gamma_h})_h \in C_0^\infty(\Omega), \quad (\chi_{\Gamma_h})_h(x) = 1, \quad x \in \Gamma, \quad 0 \leq (\chi_{\Gamma_h})_h \leq 1, \quad \text{mit}$$

$$\text{supp } (\chi_{\Gamma_h})_h \subset \Gamma_{2h} \subset \Omega \quad \text{für } h < \frac{1}{2} \text{dist}(\Gamma, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$$

Bezeichnung: sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$; $f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega) \iff \forall K \subset \Omega, K \text{ kompakt} : f \in L_1(K)$

Bemerkung : $f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega) \sim f$ 'lokal integrierbar' in Ω ; $L_1(\mathbb{R}^n) \subsetneq L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, z.B. $f \equiv 1$

Satz 1.87 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\int_\Omega f(x) \varphi(x) dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt $f(x) = 0$ f.ü. in Ω .

Beweis : Seien $\Gamma \subset \Omega$ ein beliebiges beschränktes (offenes) Gebiet mit $\overline{\Gamma} \subset \Omega$, $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma)$,

$$\varphi_h(x) = \int_\Omega \omega_h(x-y) \varphi(y) dy = \int_{|y| \leq 1} \omega(y) \varphi(x-hy) dy$$

$$\text{dist}(\bar{\Gamma}, \partial\Omega) > 0 \leadsto \exists h_\Gamma > 0 \quad \forall h, 0 < h \leq h_\Gamma : \varphi_h \in C_0^\infty(\Omega) \xrightarrow{\text{Vor.}} \int_\Omega f(x) \varphi_h(x) dx = 0$$

$$\text{setzen } f \text{ und } \varphi \text{ auf } \mathbb{R}^n \text{ fort, } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

$$\leadsto \tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tilde{f} \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

$$\begin{aligned} \leadsto 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x-y) \tilde{\varphi}(y) dy}_{\tilde{\varphi}_h(x)} dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x-y) \tilde{f}(x) dx \right) \tilde{\varphi}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(y-x) \tilde{f}(x) dx \right)}_{\tilde{f}_h(y)} \tilde{\varphi}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_h(y) \tilde{\varphi}(y) dy \end{aligned}$$

$$\text{analog mit } \tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Gamma) \leadsto 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \Re \tilde{f}_h(y) \tilde{\varphi}(y) dy = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Gamma)$$

$$\underline{\text{z.z.:}} \quad \Re \tilde{f}_h \equiv 0 \text{ in } \Gamma; \quad \text{indirekt, } \underline{\text{Annahme:}} \exists x_0 \in \Gamma : \Re \tilde{f}_h(x_0) \neq 0, \quad \text{o.B.d.A. } \Re \tilde{f}_h(x_0) > 0$$

$$\xrightarrow{\tilde{f}_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)} \exists \varrho > 0 \quad \forall y \in K_\varrho(x_0) : \Re \tilde{f}_h(y) > 0, \text{ o.B.d.A. } K_\varrho(x_0) \subset \Gamma \leadsto \exists \omega_\varrho(\cdot - x_0) \in C_0^\infty(\Gamma) :$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Re \tilde{f}_h(y) \underbrace{\omega_\varrho(y - x_0)}_{\text{supp}(\cdot) \subset K_\varrho(x_0)} dy = \int_{K_\varrho(x_0)} \underbrace{\Re \tilde{f}_h(y)}_{>0} \underbrace{\omega_\varrho(y - x_0)}_{>0 \text{ auf } K_{\varrho/2}(x_0)} dy > 0 \quad \nmid$$

$$\leadsto \Re \tilde{f}_h \equiv 0 \text{ in } \Gamma, \quad \text{analog: } \Im \tilde{f}_h \equiv 0 \text{ in } \Gamma \leadsto \tilde{f}_h \equiv 0 \text{ in } \Gamma$$

$$\bar{\Gamma} \subset \Omega \text{ kompakt} \xrightarrow{f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)} f \in L_1(\Gamma), f_h = \tilde{f}_h|_\Gamma \in L_1(\Gamma), 0 < h \leq h_\Gamma \xrightarrow{\text{Folg. 1.86}} \|f - f_h\|_{L_1(\Gamma)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\leadsto \|f\|_{L_1(\Gamma)} = \left\| f - \underbrace{f_h}_0 \right\|_{L_1(\Gamma)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \leadsto \|f\|_{L_1(\Gamma)} = 0 \iff \int_\Gamma |f(x)| dx = 0$$

$$\implies f(x) = 0 \text{ f.ü. in } \Gamma \xrightarrow{\Gamma \subset \Omega \text{ beliebig}} f(x) = 0 \text{ f.ü. in } \Omega \quad \square$$

Bemerkung : „Fundamentallemma der Variationsrechnung“:

$$f = 0 \text{ f.ü. in } \Omega \iff \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx = 0$$

zur Erinnerung: $[\mathbb{X}, \|\cdot\|_\mathbb{X}]$ normierter Raum, $A \subset \mathbb{X}$ beschränkt $\iff \exists c > 0 \quad \forall a \in A : \|a\|_\mathbb{X} \leq c < \infty$

Bezeichnung: $f \in L_p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $h \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$; setzen $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$

sowie $T_h f = T_h \tilde{f}$

Satz 1.88 Seien $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $M \subset L_p(\Omega)$ beschränkt und gleichgradig L_p -stetig, d.h.

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \sup_{f \in M} \|T_h f - f\|_{L_p(\Omega)} = 0.$$

Dann ist M präkompakt in $L_p(\Omega)$.

Beweis : 1. Schritt: sei $M_h = \{f_h : f \in M\}$, $h > 0 \xrightarrow{\text{Folg. 1.86}} M_h \subset \overline{C}(\Omega) = C(\overline{\Omega})$

zeigen: M_h präkompakt in $C(\overline{\Omega}) \xrightarrow{\text{Satz 1.36/Arzelà-Ascoli}} \underline{\text{g.z.z.:}} M_h \text{ beschränkt und gleichgradig stetig in } C(\overline{\Omega})$

$$\|\tilde{f}_h\|_{\infty, \Omega} \stackrel{\text{Satz 1.83}}{\leq} \|f\|_{L_p(\Omega)} \underbrace{\|\omega_h\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}}_{c_h} \leq c_h \sup_{f \in M} \|f\|_{L_p(\Omega)} \leadsto M_h \subset C(\overline{\Omega}) \text{ beschränkt}$$

M_h gleichgradig stetig: $\omega_h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \leadsto \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z, z', |z - z'| < \delta : |\omega_h(z) - \omega_h(z')| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \leadsto |\tilde{f}_h(x) - \tilde{f}_h(y)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\omega_h(x - z) - \omega_h(y - z)| |\tilde{f}(z)| \, dz \\ &\leq \underbrace{\|\omega_h(x - \cdot) - \omega_h(y - \cdot)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}}_{= \|\omega_h(x - y + \cdot) - \omega_h(\cdot)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \|\sup \omega_h\|^{1/p'} = \varepsilon c_h} \|f\|_{L_p(\Omega)} \\ &< \varepsilon \sup_{f \in M} \|f\|_{L_p(\Omega)} c_h = C\varepsilon \quad \text{für } |x - y| < \delta \\ \leadsto \sup_{f_h \in M_h} |f_h(x) - f_h(y)| &< C\varepsilon \quad \text{für } x, y \in \overline{\Omega}, |x - y| < \delta \end{aligned}$$

2. Schritt: $M_h \subset C(\overline{\Omega})$ präkompakt $\xrightarrow{C(\overline{\Omega}) \subset L_p(\Omega)}$ $M_h \subset L_p(\Omega)$ präkompakt

n.z.z.: M präkompakt in $L_p(\Omega)$ $\xrightarrow{\text{Folg. 1.18}}$ g.z.z.: M_h ist ε -Netz für M

$$\begin{aligned} \|f - f_h\|_{L_p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} |f(x) - f_h(x)|^p \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left| \int_{|z| \leq 1} \omega(z) (f(x) - \tilde{f}(x - hz)) \, dz \right|^p \, dx \\ &\leq \underbrace{\|\omega\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}^p \int_{|z| \leq 1} \int_{\Omega} |f(x) - \tilde{f}(x - hz)|^p \, dx \, dz}_{\leq \|\omega\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}^p \int_{|z| \leq 1} \underbrace{\int_{\Omega} |f(x) - \tilde{f}(x - hz)|^p \, dx}_{\|f - \tilde{f}(\cdot - hz)\|_{L_p(\Omega)}^p} \, dz} \\ &\leq \|\omega\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}^p \int_{|z| \leq 1} \underbrace{\sup_{f \in M} \|f - T_{-hz}f\|_{L_p(\Omega)}^p}_{< \varepsilon^p, |hz| \leq h < h_0} \, dz \\ &\leq |K_n| \|\omega\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}^p \varepsilon^p \quad \text{für } h < h_0, \text{ da } M \text{ gleichgradig } L_p\text{-stetig} \end{aligned}$$

□