Vorwort

Anwendungen der optimalen Steuerung findet man in vielen verschiedenen Gebieten, beispielsweise in der

- Technik: Steuerung von Ladekränen oder Robotern,
- Ökonomie: optimale Produktionsplanung oder Lagerhaltung in einem Betrieb,
- Biologie: Modelle zur Beeinflussung des Wachstums von Bakterien oder Zellen.

Es gibt immer wieder neue Anwendungen und Herausforderungen, wie etwa die Modellierung der Steuerung hypersonischer Flugzeuge [13] oder die Beeinflussung von Drogenkonsum und Korruption [19], die das Gebiet der optimalen Steuerung zu einem der faszinierendsten Teilgebiete der angewandten Mathematik machen.

Da es sich bei Problemen der optimalen Steuerung um Optimierungsprobleme in Funktionenräumen handelt, ist die analytische Lösung in der Regel nicht möglich. Man benötigt, wie bei der Lösung von Differentialgleichungen, numerische Verfahren. Dabei haben sich seit etwa 1980 Verfahren, die auf der Diskretisierung der Steuerungsprobleme basieren, gut bewährt.

Das vorliegende Buch erscheint in der Reihe EAGLE-STARTHILFE und gibt eine Einführung in das Gebiet der optimalen Steuerung. Neben den Fragen der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen und der Herleitung von Optimalitätsbedingungen liegt der Schwerpunkt des Buches auf Diskretisierungsverfahren.

Kapitel 1 stellt zwei typische Anwendungen der optimalen Steuerung vor. In Kapitel 2 leiten wir Optimalitätsbedingungen für eine allgemeine Klasse von Optimierungsproblemen her und betrachten speziell linear-quadratische Probleme. In Kapitel 3 werden die Optimalitätsbedingungen dann auf eine allgemeine Klasse linear-quadratischer Steuerungsprobleme angewandt. Kapitel 4 behandelt die Grundlagen für Diskretisierungsverfahren. Mit Kapitel 5 zu Bang-Bang-Steuerungen erhält der Leser einen Einblick in aktuelle Forschungsresultate. Um die Darstellung möglichst einfach zu halten, beschränken wir uns in den Kapiteln 3 bis 5 auf linear-quadratische Steuerungsprobleme. Die betrachtete Problemklasse ist aber allgemein genug für viele interessante Anwendungen. Kapitel 6 zeigt, wie man die Resultate auf eine einfache Klasse nichtlinearer Steuerungsprobleme erweitern kann. Am Ende des sechsten Kapitels geben wir einen Ausblick auf allgemeinere Steuerungsprobleme und eine kleine Auswahl weiterführender Literatur.

Diese Starthilfe kann als Grundlage für einen Einführungskurs in das Gebiet der optimalen Steuerung oder als Grundlage zu einem Seminar über optimale Steuerung benutzt werden. Da nur einfache Kenntnisse der linearen Funktionalanalysis vorausgesetzt werden, ist das Buch auch für Studierende in einem Bachelor-Studiengang geeignet.

Mehr theoretisch interessierte Leser können sich auf das Grundlagenkapitel 2 und Kapitel 3 beschränken. Als Ergänzung eignen sich die ersten drei Abschnitte von Kapitel 5 und der Anfang von Kapitel 6. Mehr an numerischen Verfahren interessierte Leser können das Kapitel 3 auch ohne die Beweise lesen und sich auf Kapitel 4 konzentrieren. Als Ergänzung eignen sich die Kapitel 5 und 6, die man unabhängig voneinander lesen kann.

Als Online-Service gibt es auf der Webseite

`http://users.minet.uni-jena.de/~alt/`

ergänzende Kapitel zu dem Buch als PDF-Datei. Dort findet der Leser eine Zusammenfassung der benötigten Kenntnisse der Funktionalanalysis, viele Ergänzungen, Übungsaufgaben und alle Bilder des Buches, sodass diese auch in einer Vorlesung oder einem Seminar verwendet werden können.

Unser besonderer Dank gilt Mandy Lehmann und Stefan Schwerdfeger für zahlreiche Hinweise und Anregungen zur Verbesserung des Textes. Ivo Hedtke [21] hat uns als TEXperte wertvolle Ratschläge zur Gestaltung von Text und Bildern mit LATEX gegeben. Jules Tipler, Account Manager der METTLE communication*innovation, stellte uns freundlicherweise das Bild eines von „The Bloodhound Project" [42] entwickelten „SuperSonic Cars" für die Gestaltung des Bucheinbandes zur Verfügung. Bei Jürgen Weiß vom Wissenschaftsverlag „Edition am Gutenbergplatz Leipzig" (Verlagsname abgekürzt: EAGLE) bedanken wir uns für die sehr angenehme Zusammenarbeit.

Jena, im September 2013 *Walter Alt, Christopher Schneider, Martin Seydenschwanz*

Inhaltsverzeichnis

Notationen

Das Buch verwendet die folgenden Notationen:

$\forall'$	Abkürzung für „für fast alle“
$\dot{x}(t)$	$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t)$
$\lvert x \rvert$	euklidische Norm
$\lVert A \rVert$	Matrixnorm
$B(\tilde{x}, r)$	offene Kugel mit Radius r um $\tilde{x}$
I_n	$n \times n$-Einheitsmatrix
$C^\infty(t_0, t_f; \mathbb{R}^n)$	Raum der stetigen Funktionen auf $[t_0, t_f]$
$L^1(t_0, t_f; \mathbb{R}^n)$	Raum der integrierbaren Funktionen auf $[t_0, t_f]$
$L^2(t_0, t_f; \mathbb{R}^n)$	Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf $[t_0, t_f]$
$L^\infty(t_0, t_f; \mathbb{R}^n)$	Raum der wesentlich beschränkten Funktionen auf $[t_0, t_f]$
Nb.	Abkürzung für „unter der/den Nebenbedingung/en“
$\mathcal{N}(f, \mathcal{F}, \alpha)$	Niveau-Menge
$W_1^1(t_0, t_f; \mathbb{R}^n)$	Raum der absolut stetigen Funktionen auf $[t_0, t_f]$ mit Ableitung in $L^1(t_0, t_f; \mathbb{R}^n)$
$W_2^1(t_0, t_f; \mathbb{R}^n)$	Raum der absolut stetigen Funktionen auf $[t_0, t_f]$ mit Ableitung in $L^2(t_0, t_f; \mathbb{R}^n)$
$W_\infty^1(t_0, t_f; \mathbb{R}^n)$	Raum der absolut stetigen Funktionen auf $[t_0, t_f]$ mit Ableitung in $L^\infty(t_0, t_f; \mathbb{R}^n)$

Weitere Informationen hierzu findet man in Alt et al. [7], Kapitel A.

1 Einführung

In diesem Kapitel diskutieren wir einige Beispiele für Probleme der optimalen Steuerung und geben einen kurzen Überblick zu den folgenden Kapiteln.

1.1 Beispiele

Wir beginnen mit einem Beispiel zur Modellierung eines Fahrzeugs mit Düsenantrieb, einer Variante des Raketenautos, das man in vielen Lehrbüchern findet, das aber auch die Grundlage für aktuelle Untersuchungen supersonischer Autos (siehe „The Bloodhound Project“ [42]) und hypersonischer Flugzeuge (siehe Chudej et al. [13]) ist.

Beispiel 1.1.1: Wir betrachten ein Auto mit Düsenantrieb, das nur geradeaus fährt. Durch den Schub der Düse kann das Auto beschleunigt und durch Schubumkehr abgebremst werden. Das Auto soll zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in der Position $x_0 = 0$ mit der Geschwindigkeit $v_0 \geq 0$ starten. Ziel ist es, den Schub der Düse so zu steuern, dass in einer vorgegebenen Zeit $t_f > 0$ die Endposition $x_f > 0$ mit der Endgeschwindigkeit $v_f = 0$ erreicht wird. Außerdem soll das Auto möglichst wenig Energie verbrauchen.

Zu erwarten ist, dass das Auto in der Startposition zunächst beschleunigt ...

... und vor Erreichen der Endposition abbremst, ...

... um möglichst nahe an der gewünschten Endposition x_f zum Stehen zu kommen.

Zur Berechnung einer optimalen Steuerung benötigen wir ein mathematisches Modell. Da das Auto nur geradeaus fährt, erstellen wir ein eindimensionales Modell mit der x-Achse als Fahrbahn. Damit sei $x(t)$ die Position des Autos zum Zeitpunkt $t \in [t_0, t_f]$. Dann muss $x(t_0) = x_0 = 0$ gelten. Weiter sei $u(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, der Schub der Düsen, der positiv (Schub nach rechts, Fahrtantrieb) oder negativ (Schub nach links, Bremsen) sein kann. Der Schub kann natürlich nicht beliebig groß sein. Ist $\bar{s}$ der maximale Schub, dann muss

$$-\bar{s} \leq u(t) \leq \bar{s} \quad \forall\, t \in [t_0, t_f]$$

gelten. Nach physikalischen Gesetzen ist

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) \quad \forall\, t \in [t_0, t_f]$$

die Geschwindigkeit des Düsenautos und

$$\ddot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) \quad \forall\, t \in [t_0, t_f]$$

die Beschleunigung, die proportional zum Schub ist, d. h., mit einem $\rho > 0$ gilt

$$\ddot{x}(t) = \rho\, u(t) \quad \forall\, t \in [t_0, t_f]\,.$$

Wir betrachten das Düsenauto als zeitabhängiges System, dessen Zustand zu einem Zeitpunkt $t \in [t_0, t_f]$ durch die Position $z_1(t) = x(t)$ und die Geschwindigkeit $z_2(t) = \dot{x}(t)$ definiert wird. Die zeitliche Änderung des Zustands in Abhängigkeit vom Schub wird durch die Differentialgleichungen

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t)\,,\ \dot{z}_2(t) = \rho\, u(t)\,, \quad t \in [t_0, t_f]$$

mit den Anfangsbedingungen

$$z_1(t_0) = x_0\,, \quad z_2(t_0) = v_0$$

beschrieben. Ziel ist es, den Schub $u(t)$ so zu wählen, dass die Beschränkungen eingehalten werden und zur Zeit t_f der gewünschte Endzustand $z_1(t_f) = x_f$, $z_2(t_f) = v_f = 0$ möglichst gut erreicht wird. Weiter soll der Energieverbrauch möglichst gering sein. Damit erhalten wir das Optimierungsproblem

$$\text{(DA)} \qquad \begin{aligned} &\min\ (z_1(t_f) - x_f)^2 + z_2(t_f)^2 + \alpha \int_{t_0}^{t_f} u(t)^2\,\mathrm{d}t \\ &\text{Nb. } \dot{z}_1(t) = z_2(t)\,, \quad \dot{z}_2(t) = \rho\, u(t)\,, \quad t \in [t_0, t_f]\,, \\ &\qquad z_1(t_0) = x_0\,, \quad z_2(t_0) = v_0\,, \\ &\qquad -\bar{s} \le u(t) \le \bar{s}\,, \qquad\qquad t \in [t_0, t_f]\,. \end{aligned}$$

Hier und im Folgenden schreiben wir „Nb.“ als Abkürzung für „unter der/den Nebenbedingung/en“.

Der letzte Term in der Zielfunktion ist ein Maß für den Energieverbrauch. Mit dem Faktor $\alpha \ge 0$ kann man die beiden Optimierungsziele gewichten.

Es sind natürlich auch noch andere Modellierungen denkbar. Beispielsweise könnte man die ersten beiden Terme in der Zielfunktion weglassen und stattdessen die gewünschten Endzustände als Nebenbedingungen $z_1(t_f) = x_f$, $z_2(t_f) = v_f = 0$ fest vorgeben. $\diamond$

Beispiel 1.1.2: (vgl. Feichtinger/Hartl [16])
In einem Planungszeitraum $[t_0, t_f]$ mit $t_f > t_0$ möchte eine Firma die Herstellung eines bestimmten Produkts so planen, dass die Gesamtkosten minimal sind. Dazu seien für $t \in [t_0, t_f]$

- $z(t)$ die zur Zeit t im Lager vorhandene Menge des Produkts,
- $v(t)$ die Nachfrage nach dem Produkt zur Zeit t,
- $u(t)$ die Produktionsrate zur Zeit t.

Die Änderung der verfügbaren Lagermenge $z(t)$ ist durch die Lagerbilanzgleichung

$$\dot{z}(t) = u(t) - v(t) \quad \forall\, t \in [t_0, t_f]$$

mit dem Anfangslagerbestand $z(t_0) = a \geq 0$ definiert.

Die Firma benutzt für die aktuelle Nachfrage $\bar{v}(t)$ eine Produktionspolitik (Steuerung) $\bar{u}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, mit zugehörigem Lagerbestand $\bar{z}(t)$. Falls sich die Nachfrage ändert, muss die Firma ihren Produktionsplan anpassen, um die geänderte Nachfrage $v(t)$ befriedigen zu können. Dabei möchte sie vom alten Produktionsplan und vom bisherigen Lagerbestand möglichst wenig abweichen, und der Lagerendbestand $z(t_f)$ soll möglichst gering sein. Die Produktionsrate ist beschränkt, d. h.

$$0 \leq u(t) \leq \bar{s} \quad \forall\, t \in [t_0, t_f]\,,$$

wobei $\bar{s}$ die maximale Produktionsrate ist. Misst man den Unterschied zwischen alter und neuer Produktionspolitik bzw. zwischen altem und neuem Lagerbestand in der L^2-Norm, so erhält man zur Berechnung der neuen Produktionspolitik das Problem

$$\text{(LHA)} \qquad \begin{aligned} \min\ & z(t_f)^2 + \alpha \int_{t_0}^{t_f} (z(t) - \bar{z}(t))^2 + (u(t) - \bar{u}(t))^2 \,\mathrm{d}t \\ \text{Nb. }\ & \dot{z}(t) = u(t) - v(t)\,, \qquad t \in [t_0, t_f]\,, \\ & z(t_0) = a\,, \\ & 0 \leq u(t) \leq \bar{s}\,, \qquad\quad\ t \in [t_0, t_f]\,. \end{aligned}$$

Dabei ist $\alpha > 0$ wieder ein Gewichtungsfaktor. ◇

Weitere Beispiele von Steuerungsproblemen für die Modellierung ökonomischer Prozesse findet man in Feichtinger/Hartl [16], Seierstad/Sydsæter [35], Beispiele für biologische Anwendungen in Lenhart/Workman [27]. Technische Anwendungen werden beispielsweise in Bryson [12] und Gerdts [18] behandelt. Weitere interessante Anwendungen findet man in Grass et al. [19] und Pesch [34].

1.2 Lösungsverfahren

Bei einfachen Problemen kann man eine optimale Steuerung aus den Optimalitätsbedingungen berechnen, die wir in Kapitel 2 für eine allgemeine Klasse von Optimierungsproblemen und in Kapitel 3 für eine allgemeine Klasse linear-quadratischer Steuerungsprobleme herleiten.

Da es sich bei den betrachteten Problemen um Optimierungsprobleme in Funktionenräumen handelt, kann man eine Lösung in der Regel nur numerisch berechnen. Hierzu benutzt man Diskretisierungsverfahren, die das Steuerungsproblem durch ein endlichdimensionales Optimierungsproblem approximieren. Durch numerische Lösung dieses Optimierungsproblems erhält man eine Näherungslösung des Ausgangsproblems. Kapitel 4 behandelt die Grundlagen dieser Verfahren. Wir demonstrieren am Beispiel einer einfachen Diskretisierung, die auf dem Euler-Verfahren zur numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen basiert, die Begriffe Konsistenz, Stabilität und Konvergenz von Diskretisierungsverfahren.

Theoretische Fehlerabschätzungen für Näherungslösungen setzen voraus, dass die optimale Steuerung glatt genug ist, wobei man in der Regel zumindest die Lipschitz-Stetigkeit dieser Funktion fordert. In vielen Anwendungen treten aber unstetige Steuerungen als Lösung auf. Kapitel 5 zeigt am Beispiel von Bang-Bang-Steuerungen, wie man in diesem Fall das Problem regularisieren kann, um eine stetige Steuerung als Lösung zu erhalten, und wie man solche Probleme numerisch lösen kann. Die Resultate zu Fehlerabschätzungen basieren auf neueren Publikationen und geben damit auch einen Einblick in die aktuelle Forschung.

In den Kapiteln 3–5 betrachten wir eine allgemeine Klasse linear-quadratischer Steuerungsprobleme. In Kapitel 6 geben wir eine kurze Einführung in die Behandlung nichtlinearer Steuerungsprobleme.

Eine Liste der in dem Buch benutzten Notationen findet man im Anschluss an das Inhaltsverzeichnis auf S. 8. Eine Zusammenfassung der benutzten funktionalanalytischen Grundlagen und Bezeichnungen findet man in Alt et al. [7], Kapitel A.