

Testen von Hypothesen

Mathematik-Didaktik B
Stochastik im Unterricht

Referenten: Alexander Hochstein
Christian Herrmann

Friedrich- Schiller Universität Jena

Jena, d. 11.11.2008

Gliederung

1. Einleitung – Lehrplaneinordnung
2. Didaktische Reduktion der Theorie
 - 2.1 Terminologie
 - 2.2 Fehlerarten
3. Didaktische Anmerkungen zur Thematik im Unterricht
4. Literatur

1. Einleitung – Lehrplaneinordnung

Bedeutung von Tests

- Kernthema in der beurteilenden Statistik
- Wichtige Anwendungen: Naturwissenschaften **UND** Humanwissenschaften
- → Statistik in der Schule von enormer Wichtigkeit
- Realitätsnahe Thematik, jedoch häufig Verständnisprobleme

1. Einleitung – Lehrplaneinordnung

- Formulieren und Überprüfen von Vermutungen liegt in der Natur des Menschen

Erwartungshaltung eines Menschen:

Vermutung

→ Ist Verdacht richtig oder falsch?

→ Risiko bei Annahme der Vermutung nach Test?

- Jedoch: Stochastik kann gestellte Fragen nicht beantworten!

Wenn die Vermutung richtig ist, wie groß ist dann das Risiko, dass sie dennoch zurückgewiesen wird?

Menschen wollen wissen, *ob* die Vermutung richtig ist und nicht, was geschieht, *wenn* sie richtig ist.

1. Einleitung – Lehrplaneinordnung

- Thüringer Lehrplan erwähnt das Testen von Hypothesen als Alternativthema in der Klassenstufe 12
- Gewöhnlicher Verlauf der Stochastik:
Kombinatorik → Wahrscheinlichkeitsrechnung → Zufallsvariable
→ Binomialverteilung → Normalverteilung → **Hypothesentesten**
- Zur Einführung prinzipiell 2 Möglichkeiten:
 - Sek. I: Aufstellen und untersuchen von Hypothesen im Rahmen der Kombinatorik (Abzählprobleme nach A. ENGEL)
 - Sek. II: Aufstellen und Untersuchen von Hypothesen im Rahmen der Binomial- und Normalverteilung

2. Didaktische Reduktion der Theorie

2.1 Terminologie

- Was ist überhaupt ein Test?
 - Ein Test ist ein Verfahren, mit dem man anhand von Beobachtungen eine begründete Entscheidung über die Gültigkeit oder Ungültigkeit einer Vermutung trifft.
- Was sind überhaupt Hypothesen?
 - Hypothesen sind Annahmen bzw. Vermutungen über über Zusammenhänge von interessierenden Sachverhalten oder auch vorläufige Antworten für ein sich stellendes Problem

2. Didaktische Reduktion der Theorie

2.1 Terminologie

- Was sind überhaupt Hypothesen?
 - Im Mathematikunterricht: Unter einer Hypothese versteht man eine gewisse Vermutung über eine Wahrscheinlichkeit aufgrund eines Stichprobenergebnisses.
- Ein klassischer Test umfasst die Überprüfung zweier Hypothesen: H_0 und H_1

2. Didaktische Reduktion der Theorie

2.1 Terminologie

Beispiele von Hypothesen

1) *Zwei einfache Hypothesen:*

→ $H_0: p=0,5$ und $H_1: p=0,8$

→ Alternativtests!

2) *Zusammengesetzte, ungerichtete Hypothesen:*

→ $H_0: p=0,5$ und $H_1: p \neq 0,5$

→ Zweiseitiger Test!

2. Didaktische Reduktion der Theorie

2.1 Terminologie

3) *Zusammengesetzte, gerichtete Hypothesen:*

→ $H_0: p=0,10$ und $H_1: p<0,10$

→ linkseitiger Test!

4) *Zusammengesetzte, gerichtete Hypothesen:*

→ $H_0: p=0,3$ und $H_1: p>0,3$

→ rechtsseitiger Test!

2. Didaktische Reduktion der Theorie

2.1 Terminologie

Klärung der Begriffe anhand eines Testbeispiels

Gewöhnlich werden ebenso viele weibliche wie männliche Kälber geboren. Die weiblichen Tiere gelten jedoch als wesentlich wertvoller. So überrascht es nicht, dass die Pharmaindustrie mit einem Mittel auf den Markt drängt, von dem sie behauptet, es steigere die Wahrscheinlichkeit für eine weibliche Geburt. Die Landwirtschaftskammer ist skeptisch und schlägt deshalb ein Experiment vor, um zu testen, was an der Behauptung dran ist.

Die Kammer wendet das Präparat in 20 Fällen an und es werden daraufhin 15 weibliche Kälber gezählt.

Was ist daraus auf dem 5% Signifikanzniveau zu schließen?

2. Didaktische Reduktion der Theorie

2.1 Terminologie

Lösung:

Es handelt sich hierbei um einen Test unter Binomialverteilung.
Treffer bedeutet in diesem Fall: Das Kalb ist weiblich.

- Notieren der Hypothesen
→ $H_0: p=0,5$ (Nullhypothese) und $H_1: p>0,5$ (Gegenhypothese)
- Ist H_0 wahr → $B(20;0,5)$ -verteilt.
- H_0 ablehnen, wenn deutlich mehr als 10 Kälber weiblich sind.
- Ablehnungsbereich: $K = \{k, k+1, \dots, 20\}$
Annahmebereich: $K^c = \{0, 1, \dots, k-1\}$ → Entscheidungsregel

2. Didaktische Reduktion der Theorie

2.1 Terminologie

Signifikanzniveau: Die Wahrscheinlichkeit, mit der eine richtige Hypothese irrtümlich verworfen wird.

$$P_{H_0\text{wahr}}(H_0 \text{ wird verworfen}) \leq 0,05$$

$$\leftrightarrow P_{p=0,5}(X \geq k) \leq 0,05$$

$$\leftrightarrow 1 - P_{p=0,5}(X < k) \leq 0,05$$

$$\leftrightarrow P_{p=0,5}(X < k) \geq 0,95$$

$$\leftrightarrow P_{p=0,5}(X \leq k-1) \geq 0,95$$

$$\leftrightarrow B(20; 0,5; k-1) \geq 0,95 \text{ (kumulierte Wahrscheinlichkeit)}$$

2. Didaktische Reduktion der Theorie

2.1 Terminologie

	0	0,	6676	5438	3585	1216	0261	0115	0032	0008	0003	0000	0000	19	
	1		9401	8802	7358	3917	1304	0692	0243	0076	0033	0005	0000	18	
	2		9929	9790	9245	6769	3287	2061	0913	0355	0176	0036	0002	17	
	3		9994	9973	9841	8670	5665	4114	2252	1071	0604	0160	0013	16	
	4			9997	9974	9568	7687	6296	4148	2375	1515	0510	0059	15	
	5				9997	9887	8982	8042	6172	4164	2972	1256	0207	14	
	6					9976	9629	9133	7858	6080	4793	2500	0577	13	
	7					9996	9887	9679	8982	7723	6615	4159	1316	12	
	8					9999	9972	9900	9591	8867	8095	5956	2517	11	
	9						9994	9974	9861	9520	9081	7553	4119	10	
	10						9999	9994	9961	9829	9624	8725	5881	9	
	11							9999	9991	9949	9870	9435	7483	8	
	12								9998	9987	9963	9790	8684	7	
	13									9997	9991	9935	9423	6	
	14										9998	9984	9793	5	
	15											9997	9941	4	
	16												9987	3	
	17													2	
20															20
<i>n</i>														<i>k</i>	<i>n</i>
			0,98	0,97	0,95	0,90	5/6	0,80	0,75	0,70	2/3	0,60	0,50		
								<i>p</i>							

Nicht aufgeführte Werte sind 1,0000.

1 - 0,0207
= 0,9793

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \geq \frac{1}{2}$, gilt: $P(X \leq k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$.

2. Didaktische Reduktion der Theorie

2.1 Terminologie

- $k-1 \geq 14$
 $\leftrightarrow k \geq 15$
- $K = \{15, 16, \dots, 20\}$ (Verwerfungsbereich)
 $K^c = \{0, 1, 2, \dots, 14\}$ (Annahmebereich)

→ in unserem Fall ist $X=15$: wir lehnen H_0 ab!

2. Didaktische Reduktion der Theorie

2.1 Terminologie



Rezept für das Vorgehen bei einem Test mit Binomialverteilung

1. Bedeutung eines Treffers in der vorliegenden Bernoulli-Kette festlegen!
2. Notieren der Hypothesen!
3. H_0 sei wahr, Verteilung der Zufallsvariable angeben!
4. Irrtumswahrscheinlichkeit festlegen/notieren!
5. Bestimmung des Annahme- und Verwerfungsbereichs!
6. Treffen einer Entscheidung aufgrund der Trefferzahl!

2.2 Fehlerarten

- Testverfahren = Entscheidung aufgrund von Ergebnissen eines Zufallsexperimentes
 - Konstruktion impliziert **zwei** mögliche **Fehler**

ÜBERSICHT		Zustand der Wirklichkeit	
		H_0 richtig	H_0 falsch
Entscheidung: Die Hypothese H_0 wird	abgelehnt	Fehler 1. Art (α -Fehler)	richtige Entscheidung
	beibehalten	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art (β -Fehler)

2.2 Fehlerarten

Fehler 1. Art (bedingte Wahrscheinlichkeit) $P_{H_0 \text{ wahr}}(H_0 \text{ abgelehnt})$

Eine richtige Hypothese wird abgelehnt (Irrtumswahrscheinlichkeit α).

- Annahme H_0 gilt – α bestimmt den Verwerfungsbereich

Fehler 2. Art (bedingte Wahrscheinlichkeit) $P_{H_0 \text{ falsch}}(H_0 \text{ angenommen})$

Eine falsche Hypothese wird nicht abgelehnt.

- Annahme H_1 gilt – β bestimmt Annahmebereich der Alternative

→ α ist nicht die Wahrscheinlichkeit mit der man sich irrt, sondern jene Wahrscheinlichkeit mit der eine richtige Hypothese irrtümlich zurückgewiesen wird!

→ **beide** Fehler beurteilen die **Qualität** eines Tests

2.2 Fehlerarten

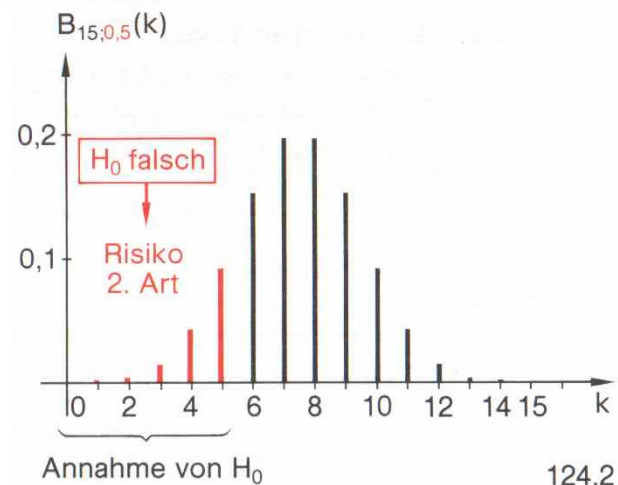
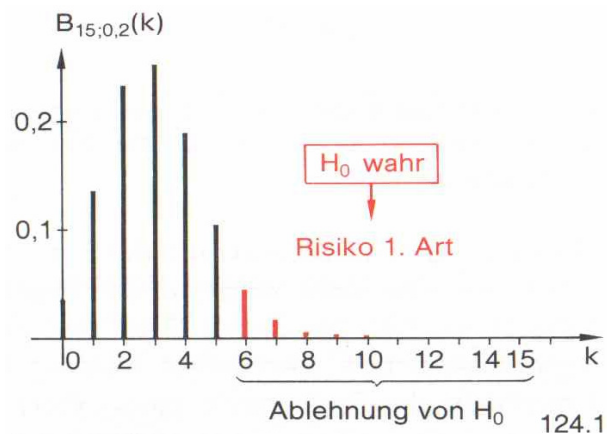
- Beide Fehler lassen sich nur bei einem Alternativtest berechnen!
- meist α vorgegeben – kritischen Wert bestimmen – β berechnen
oder: Annahmebereich implizieren – α und β berechnen

Beispiel:

Eine Schachtel enthalte Schrauben der Qualität A und B. Es ist lediglich bekannt, dass entweder 20% oder 50% aller Schrauben die Qualität A besitzen. Es wird behauptet, es wären 20%. Dies soll mit $\alpha=0,1$ getestet werden!

- Stichprobe sind 15 Ziehungen mit Zurücklegen (Binomialverteilung)
 $H_0: p=0,2$ gegen $H_1: p=0,5$

2.2 Fehlerarten



- α - und β - Fehler sind miteinander vernetzt!

Es gilt: $\alpha \downarrow \rightarrow \beta \uparrow$ bzw. $\alpha \uparrow \rightarrow \beta \downarrow$

- Beide Fehler lassen sich **nicht gleichzeitig** verkleinern!
- Dies ist nur durch eine Vergrößerung der Stichprobe möglich!
- Der β - Fehler kann unter Umständen überraschend groß sein!

Beide Fehler muss man im Auge behalten und je nach Sachverhalt einschätzen können!

3. Didaktische Anmerkungen zur Thematik im Unterricht

Verständnisprobleme

- Häufiges Problem: Logik vs. Rezeptbuchstatistik
- Stichhaltige Begründungen der Antworten sind wichtiger als deren Richtigkeit!
- Welche Hypothese testet man eigentlich? – Standpunkte herausfinden und interpretieren (Hersteller vs. Verbraucher)
- Indirekter Ansatz eines Tests – logische Seite verstehen!
→ dadurch wird gerade die Hypothese getestet, an der man eigentlich nicht interessiert ist!
- Denken in Bereichen und deren zugeordneten Wahrscheinlichkeiten vs. Wahrscheinlichkeiten einzelner Ergebnisse

3. Didaktische Anmerkungen zur Thematik im Unterricht

Zur Strategie

- An Hand eines Stichprobenergebnisses soll über die Wahrheit einer zu testenden Hypothese geurteilt werden!
- Diese Hypothese wird nicht verworfen, solange das Stichprobenergebnis im Annahmebereich liegt!
- **Achtung!**
Dadurch wird die Hypothese weder bestätigt noch bewiesen. Es kann lediglich eine **Verträglichkeit** mit der zu testenden Hypothese festgestellt werden!

3. Didaktische Anmerkungen zur Thematik im Unterricht

Lernziele

1. **Fachsprache** beim Testen von Hypothesen verstehen und benutzen.
2. Entscheidungsregeln bei vorgegebenem α bestimmen – entscheidungstheoretische **Logik**
3. **Fehlerarten** beschreiben, berechnen und **deuten!**
4. **Verständnis** über die Formulierung von möglichen Hypothesen.
5. Interpretation von Ergebnissen **im Sinne** des Ansatzes.

Aufgabentypen

- Fragen nach Entscheidungsregeln, Annahme- und Verwerfungsbereichen (rechnerische Auseinandersetzung)
- Vorgabe von konkreten Situationen – Wie soll ich beurteilen? – eventuell lebhafte Diskussionen mit SuS

3. Didaktische Anmerkungen zur Thematik im Unterricht

Diskussionsfragen für die Gruppenarbeit

1. a) Ein Signifikanzniveau von 5% bedeutet, dass wir, wenn wir die Nullhypothese zurückweisen, dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% zu Unrecht tun.

b) Wenn die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau von 1% zurückgewiesen wird, so bedeutet dies, dass mit 99% Wahrscheinlichkeit die Alternativhypothese richtig ist.

3. Didaktische Anmerkungen zur Thematik im Unterricht

2. Es soll ein neu entwickeltes, sehr teures Medikament gegen eine bislang zu 90% tödlich verlaufende Krankheit an einer Zufallsstichprobe von 20 Patienten getestet werden. (Bislang gab es keinerlei Therapie gegen diese Krankheit)

Schädliche Wirkungen des Medikamentes sind do gut wie ausgeschlossen. Getestet wird also (einseitig) die Nullhypothese, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit bei Einnahme des Medikamentes dieselbe ist wie bei Nichteinnahme.

Welches Signifikanzniveau erscheint euch eher angemessen: 5% oder 10% ?

3. Didaktische Anmerkungen zur Thematik im Unterricht

3. Eine Untersuchung an einer Zufallsstichprobe von rund 10000 Personen, die regelmäßig eine Ausdauersportart wie Jogging, Radfahren usw. betreiben, hat ergeben, dass die Auftretenshäufigkeit von Erkrankungen des Herz-Kreislauf-Systems in dieser Personengruppe signifikant (bei einem Signifikanzniveau von 5%) geringer ist, als in der Gesamtbevölkerung. Kommt eurer Meinung nach diesem Testergebnis eine praktische Bedeutung für die Gesundheitspolitik zu, so dass etwa eine aufwendige Kampagne für das Betreiben von Ausdauersportarten allein aufgrund dieses Befundes sinnvoll erscheinen würde?

3. Didaktische Anmerkungen zur Thematik im Unterricht

3. Nehmt Stellung zu folgenden Schüleraussagen:
 - a) „Es ist nun eindeutig bewiesen, dass die Nullhypothese falsch ist“
 - b) „Die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung bei einem Signifikanzniveau von 5% liegt bei höchstens 5%!“
 - c) „Wir haben H_0 auf dem 5%-Niveau verworfen. Das bedeutet: In höchstens 5% der Fälle, in denen wir H_0 aufgrund des Versuchsergebnisses ablehnen, begehen wir einen Irrtum.“

4. Literatur

Barth, F., R. Haller (1996): *Stochastik Leistungskurs*, Ehrenwirth Verlag, S. 330 ff.

Diepgen, R. (1985): „Was Schüler zum Hypothesentesten wissen sollten“ in Zeitschrift: *Stochastik in der Schule. Heft 1*, S. 32ff.

Strick, H.K. (1986): „Testen von Hypothesen“ in: *Mathematik heute. Leistungskurs Stochastik. Lösungen und didaktischer Kommentar*, Schroedel, S. 272ff.

Strick, H.K. (1986): „Verteilungen und Beurteilende Statistik – über Probleme bei der Einführung des Testens von Hypothesen“ in Zeitschrift: *Stochastik in der Schule. Heft 1*, S. 4ff.

Buth, M. (1993): „Zum Thema Testen von Hypothesen: Was man aus der Forschungspraxis für die Schule lernen kann“ in Zeitschrift: *Stochastik in der Schule. Heft 2*, S.35f.

Feuerpfeil, Heigl, Wiedling (1989): *Praktische Stochastik*, Bayerischer Schulbuch-Verlag München, S. 157ff.