Friedrich-Schiller-Universität Jena, Winter 2019/20 Besprechung: **Dezember 2019**
Einführung in die Numerische Mathematik und das Wissenschaftliche Rechnen
Prof. Dr. Dietmar Gallistl

Beispielaufgaben Nr. 1

Ausgabenstellungen folgen Konventionen und Notation der Vorlesung.

Aufgabe 1.1: LGS, 3+1+3+2+1 Punkte

(a) Berechnen Sie P, L, R für eine Zerlegung $PA = LR$ der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Es bezeichnen w_1, w_2, w_3 die Spalten von A. Berechnen Sie folgende sechs Größen

$$\|w_1\|_2, \quad \|w_2\|_2, \quad \|w_3\|_2, \quad \langle w_1, w_2\rangle_2, \quad \langle w_2, w_3\rangle_2, \quad \langle w_3, w_1\rangle_2.$$

(c) Berechnen Sie Q, R für eine Zerlegung $A = QR$.

(d) Bestimmen Sie die Kleinste-Quadrate-Lösung x des überbestimmten LGS

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(e) Ist die Lösung in (d) eindeutig?

Aufgabe 1.2: Interpolation/Quadratur 4+1+3 Punkte

(a) Wir bertrachten folgende drei Funktionen über dem Intervall $[-1, 1]$

$$u(x) = 1 - |x| \quad v(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x) \quad w(x) = \max\{0, -\sin(\frac{\pi}{2}x)\}.$$

Bestimmen Sie Gewichte $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ und Stützstellen x_0, x_1, x_2 einer Quadraturformel

$$\tilde{I}(f) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j f(x_j),$$

die exakt für alle Funktionen aus $\operatorname{span}\{u, v, w\}$ ist.

(b) Wir betrachten das gewichtete Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{2} f(x)g(x)|x|dx$$

für stetige Funktionen $f, g \in C([-1, 2])$. Zeigen Sie, dass die Funktionen $p_0(x) = 1$ und $p_1(x) = x - \frac{14}{15}$ orthogonal bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sind.

(c) Bestimmen Sie einen Punkt $x_0 \in [-1, 2]$ und ein Quadraturgewicht $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass die Quadraturformel $\hat{I}(p) := \alpha_0 p(x_0)$ folgende Eigenschaft erfüllt

$$\forall p \in P_1 \qquad I(p) = \int_{-1}^{2} p(x)|x|dx,$$

wobei P_1 der Raum der Polynome ersten Grades ist.

Aufgabe 1.3: Gemischte Fragen, 5 Punkte

- Welchen maximalen Exaktheitsgrad hat eine Newton-Cotes-Formel mit 4 Quadraturpunkten?
- Ist der interpolierende kubische Spline maximaler Glattheit eindeutig.
- Gestattet jede symmetrische Matrix vollen Ranges eine Zerlegung $A = LR$?
- Es sei eine Quadraturformel mit $n + 1$ Quadraturpunkten $x_0, \ldots, x_n$ gegeben. Nennen Sie eine Funktion, die durch diese Formel nicht exakt integriert wird.
- Diskrete Fourier-Transformation bzgl. vier Werten y_0, y_1, y_2, y_3. Frage: Reicht die Kenntnis von $\mathcal{F}(y_0, y_2)$ und $\mathcal{F}(y_1, y_3)$ aus, um $\mathcal{F}(y_0, y_1, y_2, y_3)$ zu bestimmen?