

Übung Nr. 0

Aufgabe 0.1: Division

Zeigen Sie, dass die Division

$$\text{division} : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$$

eine gut konditionierte Operation ist.

Aufgabe 0.2: relativer Rundungsfehler

Wir betrachten Maschinenzahlen $\pm m \cdot b^{\pm e}$ mit $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, $e \in \mathbb{N}_0$ und $b^{-1} \leq m < 1$. Zeigen Sie, dass der absolute Rundungsfehler für jedes x aus dem zulässigen Bereich folgende Abschätzung erfüllt

$$|x - \text{rd}(x)| \leq \frac{1}{2} b^{-r} b^e.$$

Dabei bezeichnet r die Mantissenlänge.

Aufgabe 0.3: Rechenaufwand Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix A kann durch die Leibniz-Formel wie folgt ausgedrückt werden

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j, \sigma(j)}$$

- Wie viele arithmetische Operationen sind zur Auswertung dieses Ausdrucks erforderlich?
- Wie lange benötigt ein Rechner mit 10^9 Operationen pro Sekunde zur Berechnung der Determinante mit der Leibniz-Formel für $n = 25$?
- Ist die Leibniz-Formel für numerische Berechnungen geeignet? (Zum Vergleich: Alter der Milchstraße ca. 13 Milliarden Jahre).