

## Übung Nr. 1

### Aufgabe 1.1: Maschinenzahlen und das Assoziativgesetz

Sie haben einen Computer mit Dezimaldarstellung und einer Mantissenlänge von 3 Stellen, das heißt, jede Zahl hat die Form  $0.m_1m_2m_3 \cdot 10^a$ . Dabei ist die Rundungsvorschrift  $\text{rd}$  für eine Zahl in Dezimaldarstellung  $x = \pm 0.m_1m_2m_3m_4 \cdots \cdot 10^a$  mit  $m_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  und  $m_1 \neq 0$  gegeben durch

$$\text{rd}(x) = \pm \begin{cases} 0.m_1m_2m_3 \cdot 10^a & \text{falls } m_4 \leq 4 \\ (0.m_1m_2m_3 + 0.001) \cdot 10^a & \text{falls } m_4 \geq 5 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Gleitkommaoperationen

$$0.001 \oplus (\text{rd}(\pi) \ominus \text{rd}(\pi)) \quad \text{und} \quad (0.001 \oplus \text{rd}(\pi)) \ominus \text{rd}(\pi)$$

Berechnen Sie die absoluten und relativen Fehler in beiden Fällen.

### Aufgabe 1.2: Konditionierung der Inversen

Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Abbildung, die im Punkte  $x \in \mathbb{R}^n$  umkehrbar ist. Die relativen Konditionszahlen von  $f$  bei  $x$  werden in der Matrix  $K_x(f) = (\kappa_{ij})_{i,j=1}^n$  zusammengefasst. Ebenso werden die relativen Konditionszahlen der inversen Abbildung  $f^{-1}$  bei  $y = f(x)$  in der Matrix  $K_y(f^{-1})$  zusammengefasst. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass alle Komponenten von  $x$  und  $y$  von 0 verschieden sind. Zeigen Sie  $K_y(f^{-1}) = (K_x(f))^{-1}$ .

### Aufgabe 1.3: Ermittlung der Maschinengenauigkeit

Geben Sie ein Verfahren an, mit dem sich die Maschinengenauigkeit  $\mathbf{eps}$  eines Rechners experimentell ermitteln lässt.

### Aufgabe 1.4: Diskretisierungsfehler

Die Ableitung  $f'(x)$  kann durch die Differenzenquotienten

$$d_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{und} \quad D_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

approximiert werden. Benutzen Sie Taylorentwicklung unter der Annahme, dass  $f \in C^\infty([x-2h, x+2h])$ , um eine Abschätzung des Diskretisierungsfehlers von der Form

$$|f'(x) - d_h(x)| = \mathcal{O}(h^\alpha) \quad \text{bzw.} \quad |f'(x) - D_h(x)| = \mathcal{O}(h^\alpha)$$

zu erhalten. Bestimmen Sie in beiden Fällen den höchsten Koeffizienten  $\alpha$ .

### Aufgabe 1.5: Bonusaufgabe: Konditionierung und Rundungsfehler

Wir betrachten die Funktion:

$$f(x) = x^3 \left( \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x} \right).$$

- (a) Man bestimme die Konditionszahl der Funktionsauswertung. Für welche Argumente  $x$  ist die Funktion gut, für welche schlecht konditioniert?
- (b) Man werte  $f(x)$  für  $x = 1.4 \cdot 10^2$  bei vierstelliger Arithmetik (im Dezimalsystem) nach dem folgenden Verfahren aus:

1	$a_1 = x^2$
2	$a_2 = a_1 - 1$
3	$a_3 = x/a_2$
4	$a_4 = 1/x$
5	$a_5 = a_3 - a_4$
6	$a = x^3 a_5$

- (c) Man schlage ein "stabileres" Verfahren zur Auswertung von  $f(x)$  vor und wiederhole die Rechnung in der vorherigen Teilaufgabe. Man bestimme wieder absoluten sowie relativen Fehler.