Friedrich-Schiller-Universität Jena, Winter 2019/20 Besprechung: **bei Bedarf**
Einführung in die Numerische Mathematik und das Wissenschaftliche Rechnen
Prof. Dr. Dietmar Gallistl

Übung Nr. 2

Aufgabe 2.1: Operatornorm

Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$. Beweisen Sie:

(a) Durch $\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ ist eine mit der Vektornorm $\|\cdot\|$ verträgliche Matrizennorm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ erklärt.

(b) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Wir betrachten die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$. Zeigen Sie, dass für die natürliche Matrizennorm gilt
$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm $\|A\|_{\mathrm{F}} := \left(\sum_{j,k=1}^n |A_{jk}|^2\right)^{1/2}$ mit der euklidischen Norm verträglich ist und dennoch für $n \geq 2$ nicht die zu $\|\cdot\|_2$ zugehörige natürliche Matrixnorm ist (ein Gegenbeispiel für $n = 2$ reicht).

Aufgabe 2.2: Innenprodukt Wir betrachten den Raum $C([a, b])$ der stetigen Funktionen über dem Intervall $[a, b]$ und eine positive (reellwertige) Funktion $\omega \in C([a, b])$ mit $\omega > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Abbildung $C([a, b])^2 \ni (f, g) \mapsto \langle f, g\rangle_{L^2(a,b),\omega} \in \mathbb{C}$ mit $\langle f, g\rangle_{L^2(a,b),\omega} := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\omega(x)\,dx$ ein Skalarprodukt auf $C([a, b])$ erklärt ist.

(b) Beweisen Sie, dass durch $\|f\|_{L^2(a,b),\omega} = \langle f, f\rangle^{1/2}_{L^2(a,b),\omega}$ eine Norm auf $C([a, b])$ erklärt ist.

Aufgabe 2.3: Spaltensummennorm

Zeigen Sie, dass die "Spaltensummennorm" $\|A\|_1 := \max_{1\leq k\leq n} \sum_{j=1}^n |A_{jk}|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ die zur ℓ^1-Norm $\|\cdot\|_1$ zugehörige Operatornorm (natürliche Matrizennorm) ist.

Aufgabe 2.4: Čebyšëv-Polynome *(Tschebyscheff-Polynome)* Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktionen $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ auf $[-1, 1]$. Beweisen Sie:

(a) Die Funktionen T_n genügen der Drei-Term-Rekursion $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ für $n \geq 1$.

(b) Die Funktionen $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bilden ein Orthogonalsystem im Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2_\omega(-1,1)}$ bezüglich der Gewichtsfunktion $\omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$.

(c) Die T_n sind die Čebyšëv-Polynome.

(d) Es gilt $|T_n(x)| \leq 1$. Es gilt $|T_n(x)| = 1$ genau dann, wenn $x = \cos(k\pi/n)$ für ein $k \in \{0, \dots, n\}$.

(e) Die Polynome T_n haben auf $\mathbb{R}$ die Darstellung $T_n(x) = \dfrac{1}{2}\big((x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\big)$.