Friedrich-Schiller-Universität Jena, Winter 2019/20 Besprechung: **07.11.2019**
Einführung in die Numerische Mathematik und das Wissenschaftliche Rechnen
Prof. Dr. Dietmar Gallistl

Übung Nr. 3

Aufgabe 3.1: Leibniz-Formel für dividierte Differenzen

(a) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen und $x_0, \dots x_k \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass die dividierten Differenzen der Funktion $\varphi := fg$ folgende Formel erfüllen

$$[x_0, \dots, x_k]\varphi = \sum_{j=0}^{k} [x_0, \dots, x_j]f \; [x_j, \dots, x_k]g.$$

(b) Es seien $x_0, \dots x_k > 0$ paarweise verschiedene positive Zahlen. Berechnen Sie die k-te dividierte Differenz $[x_0, \dots, x_k]f$ der Funktion $f(x) = 1/x$.

Aufgabe 3.2: Hermite-Interpolation

Gegeben sei eine ℓ-fach stetig differenzierbare Funktion f. Zu paarweise verschiedenen Knoten $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ mit $\mu_0, \dots, \mu_m \in \{0, \dots, \ell\}$ ist ein Polynom $p \in P_n$ gesucht mit $n = m + \sum_{j=0}^{m} \mu_j$ und

$$\forall j \in \{0, \dots, m\} \forall k \in \{0, \dots, \mu_j\} \quad p^{(k)}(x_j) = f^{(k)}(x_j)$$

(hier bezeichnet $g^{(k)}$ die k-te Ableitung einer Funktion g). Zeigen-Sie, dass diese Interpolationsaufgabe eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 3.3: Absolute Kondition der Lagrange-Interpolationsaufgabe

Zu festen Stützwerten $a < x_0 < \cdots < x_n < b$ erklärt die Lagrange-Interpolation erklärt eine lineare Abblidung $\varphi : C([a, b]) \to P_n$. Wir betrachten die Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ und ihre Operatornorm, die für eine (zulässige) lineare Abbildung A erklärt ist durch

$$\|A\| = \sup_{f \in C([a,b]) \setminus \{0\}} \frac{\|Af\|_\infty}{\|f\|_\infty}.$$

Beweisen Sie

$$\|D\varphi\| = \max_{x \in [a,b]} \sum_{j=0}^{n} |L_j^{(n)}(x)|.$$

Hierbei bezeichnet D die (totale) Ableitung und $L_0^{(n)}, \dots, L_n^{(n)}$ sind die Lagrange-Basispolynome von P_n.

Aufgabe 3.4: Gauß-Approximation Wir betrachten das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(a,b),\omega}$. Es bezeichne wie üblich P_n den Raum der Polynome vom Grad $\leq n$. Es sei $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ eine Basis von P_n und $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ definiert durch

$$A_{jk} = \langle \lambda_k, \lambda_j \rangle_{L^2(a,b),\omega}.$$

(a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ Koeffizientenvektoren derart, dass $f, g \in C([a, b])$ die Darstellungen

$$f = \sum_{k=1}^{n+1} x_k \lambda_k \quad \text{und} \quad g = \sum_{j=1}^{n+1} y_j \lambda_j$$

besitzen. Beweisen Sie $\langle f, g \rangle_{L^2(a,b),\omega} = y^* A x$.

(b) Es sei $f \in C([a, b])$ gegeben und es sei $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch $y_j = \langle f, \lambda_j \rangle_{L^2(a,b),\omega}$ für jedes $j = 1, \dots, n+1$. Zeigen Sie, dass jedes $p \in P_n$ mit Koeffizientenvektor $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ (also mit $p = \sum_{j=1}^{n+1} x_j \lambda_j$) erfüllt

$$\|f - p\|^2_{L^2(a,b),\omega} = \min_{q \in P_n} \|f - q\|^2_{L^2(a,b),\omega} \quad \text{genau dann, wenn} \quad \frac{1}{2} x^* A x - y^* x = \min_{z \in \mathbb{R}^{n+1}} \left(\frac{1}{2} z^* A z - z^* y \right).$$

(c) Beweisen Sie, dass zu jedem $f \in C([a, b])$ ein eindeutiges $p \in P_n$ existiert mit $\|f - p\|_{L^2(a,b),\omega} = \min_{q \in P_n} \|f - q\|_{L^2(a,b),\omega}$.