Friedrich-Schiller-Universität Jena, Winter 2019/20 Besprechung: **14.11.2019**
Einführung in die Numerische Mathematik und das Wissenschaftliche Rechnen
Prof. Dr. Dietmar Gallistl

# Übung Nr. 4

## Aufgabe 4.1: Neville-Algorithmus

An einem 21. Dezember wurden folgende Tageslängen gemessen

| Ort | Tageslänge | Lage |
|---|---|---|
| Berlin | 7h39m | $52,5°$N |
| Rom | 9h07m | $41,9°$N |
| Helsinki | 5h49m | $60,2°$N |
| Minsk | 7h23m | $53,9°$N |
| Marseille | 8h58m | $43,3°$N |
| Santiago de Chile | 14h20m | $33,4°$S |

Bestimmen Sie die Tageslänge in Jena ($50,9°$N) druch Auswertung des zugehörigen Interpolationspolynoms mit Hilfe des Neville-Algorithmus.

*Bemerkung:* Wenn Sie von Hand rechnen, reicht vierstellige Dezimalrechnung.

## Aufgabe 4.2: Extrapolation

Für die Funktion $f(x) = \sinh(x)$ ist folgende Wertetabelle gegeben

| $x$ | 0.52 | 0.56 | 0.60 | 0.64 | 0.68 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.54375355 | 0.58973171 | 0.63665358 | 0.68459422 | 0.73363036 |

.

Betrachten Sie die drei möglichen Differenzenquotienten

$$a(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad a(h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad a(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

und bestimmen Sie jeweils ein möglichst großes $q$ derart, dass $a(h) = f'(x) + a_1 h^q + a_2(h)h^{2q}$ mit Koeffizienten $a_1, a_2$ und $a_2(h) = a_2 + o(1)$ für $h \to 0$. Bestimmen Sie jeweils durch Richardson-Extrapolation die entsprechenden Approximationen an $f'(0.6)$. Bestimmen Sie eine Näherungsformel für $f''(x)$ und ermitteln Sie eine Näherung an $f''(0.6)$.

## Aufgabe 4.3: Dividierte Differenzen

Es sei $f \in C^{n+m}([a,b])$. Beweisen Sie, dass sich die dividierte Differenz $(x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0, \dots, x_n]f$ als Funktion für Argumente aus $[a,b]^{n+1}$ mit paarweise verschiedenen Einträgen zu einer Funktion $[a,b]^{n+1} \to \mathbb{R}$ der Klasse $C^m$ fortsetzen lässt durch folgende Vorschrift:

- Falls $x_0 = \cdots = x_n$, setzt man
$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{f^{(n)}}{n!}(x_0).$$
- Falls ein Paar $(j,k)$ mit $x_j \neq x_k$ existiert, setzt man rekursiv
$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{[x_0, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n]f - [x_0, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_n]f}{x_k - x_j}.$$

## Aufgabe 4.4: Kubische Splines

Es bezeichne $S_0$ den Raum der natürlichen kubischen Spline-Funktionen zu den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

(a) Welche der folgenden Funktionen liegen in $S_0$?
$$\text{(i) } f(x) = x^3 - x^2, \quad \text{(ii) } f(x) = x^2(x-6) - (x-2)^3, \quad \text{(iii) } f(x) = \max\{0, x-1\}^3 - \frac{1}{2}x^3$$

(b) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s_2 \in S_0$ für $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingunen durch $s_2''(x_0) = f''(x_0)$ und $s_2''(x_2) = f''(x_2)$ ersetzt werden?