Friedrich-Schiller-Universität Jena, Winter 2019/20 Besprechung: **21.11.2019**
Einführung in die Numerische Mathematik und das Wissenschaftliche Rechnen
Prof. Dr. Dietmar Gallistl

Übung Nr. 5

Aufgabe 5.1: Minimierungseigenschaft kubischer Splines Der interpolierende natürliche kubische Spline s_n erfüllt

$$\int_a^b |s_n''(x)|^2 dx \leq \int_a^b |u''(x)|^2 dx$$

für jede andere Funktion $u \in C^2([a,b])$ mit $u(x_j) = s_n(x_j)$ für alle $j = 0, \ldots, n$.

Aufgabe 5.2: Diskrete Fourier-Transformation Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\theta = 0$, $m = n/2$, falls n gerade und $\theta = 1$, $m = (n-1)/2$, falls n ungerade. Für $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathcal{F}(y_0, \ldots, y_n) = (c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ gibt es ein eindeutiges interpolierendes trigonometrisches Polynom der Form

$$r_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{m} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big) + \frac{\theta}{2} a_{m+1} \cos((m+1)x).$$

Die Koeffizienten erfüllen

$$a_k = c_k + c_{n+1-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{n+1-k}) \quad (k = 0, \ldots, m)$$

sowie $a_{m+1} = 2c_{m+1}$, falls $n = 2m+1$.

Aufgabe 5.3: Symmetrieeigenschaften trigonometrischer Interpolation Es sei $n = 2k \in \mathbb{N}$ geradzahlig. Eine reellwertige 2π-periodische Funktion f werde an den Stellen $x_j = \pi j/n$ mit $j = 0, \ldots, 2n-1$ ausgewertet und mit $f_j := f(x_j)$, $j = 0, \ldots, 2n-1$, das reelle trigonometrische Interpolationspolynom

$$r(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) + \frac{a_n}{2} \cos(nx)$$

gebildet. Zeigen Sie:

(a) Gilt $f(x+\pi) = -f(x)$ für alle $x \in [0, 2\pi]$, so verschwinden alle geraden diskreten Fourier-Koeffizienten, d.h. $a_0 = a_2 = b_2 = a_4 = b_4 = \cdots = b_{n-2} = a_n = 0$.

(b) Gilt $f(x+\pi) = -f(x)$ und $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [0, 2\pi]$, dann gilt

$$b_j = 0 \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n-1\} \quad \text{und} \quad a_0 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

(c) Gilt $f(x+\pi) = -f(x)$ und $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [0, 2\pi]$, dann gilt

$$a_j = 0 \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad b_2 = b_4 = \cdots = b_{n-2} = 0.$$

Aufgabe 5.4: Trigonometrische Interpolation Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin^4(x)$.

(a) Berechnen Sie das trigonometrische Interpolationspolynom p vom Grad 7 durch die Stützstellen

$$x_j = j\pi/4 \quad \text{mit } j = 0, \ldots, 7.$$

(b) Zeigen Sie, dass sogar $p = f$ gilt.