Friedrich-Schiller-Universität Jena, Winter 2019/20 Besprechung: **28.11.2019**
Einführung in die Numerische Mathematik und das Wissenschaftliche Rechnen
Prof. Dr. Dietmar Gallistl

Übung Nr. 6

Aufgabe 6.1: Mittelpunktregel Zeigen Sie für die Mittelpunktregel und $f \in C^2[a,b]$ die Restglieddarstellung

$$\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

für eine Zwischenstelle $\xi \in [a,b]$.

Aufgabe 6.2: Trapezregel

(a) Beweisen Sie, dass für die Trapezregel die Fehlerdarstellung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,dx$$

gilt und folgern Sie daraus die Fehlerdarstellung aus der Vorlesung.

(b) Folgern Sie aus (a) die Abschätzung

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]\right| \leq \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b |f''(x)|\,dx.$$

(c) Zur Verbesserung der Genauigkeit werde das Intervall $[a,b]$ in n gleichgroße Teilintervalle mit der Breite $(b-a)/n$ unterteilt. Wenden Sie die Trapezregel auf jedem der Teilintervalle an und benutzen Sie die Fehlerabschätzung aus (b) zur Herleitung einer Abschätzung für den Gesamtfehler dieser "summierten Trapezregel". Leiten Sie eine zweite Fehlerabschätzung mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Abschätzung (für jedes Teilintervall) her. Welche Fehlerabschätzung ist vorzuziehen?

Aufgabe 6.3: Gauß-Punkte Die Nullstellen des n-ten Orthogonalpolynoms $p_n \in P_n$ bezüglich $L^2(a,b),\omega$ sind genau die Eigenwerte der Matrix

$$J_n = \begin{bmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & & & \\ \gamma_2 & \delta_2 & \gamma_3 & & & \\ & \gamma_3 & \delta_3 & \gamma_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \delta_{n-1} & \gamma_n \\ & & & & \gamma_n & \delta_n \end{bmatrix}$$

mit $(J_n)_{jk} = 0$ falls $|j-k| > 1$. Hierbei sind die Zahlen δ_j und $\gamma_j = \sqrt{\gamma_j^2}$ die Parameter aus der Drei-Term-Rekursion.

Hinweis: Zeigen Sie, dass p_n das charakteristische Polynom von J_n ist.

Aufgabe 6.4: Quadratur (a) Mit wie vielen Funktionsauswertungen kann das Integral

$$\int_0^1 (1+2x)^{-1}dx$$

mit einem Fehler kleiner als 10^{-8} berechnet werden

(i) mittels der summierten Trapezregel?

(ii) mittels der summierten Simpson-Regel?

(Es ist hierzu nicht notwendig, das Integral explizit zu berechnen.)

(b) Bestimmen Sie eine (Gaußsche) Quadraturformel für das Integral

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)\sqrt{|x|}dx$$

mit genau zwei Stützstellen, die alle kubischen Polynome $f \in P_3$ exakt integriert.