Friedrich-Schiller-Universität Jena, Winter 2019/20 Besprechung: **05.12.2019**
Einführung in die Numerische Mathematik und das Wissenschaftliche Rechnen
Prof. Dr. Dietmar Gallistl

Übung Nr. 7

Aufgabe 7.1: Konditionszahl

Es bezeichne $X := \mathrm{GL}(\mathbb{R}, n) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathrm{inv} : X \to X \quad A \mapsto A^{-1}$$

und eine Matrizennorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Es seien $A \in X$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Beweisen Sie

$$(A + B) \in X \quad \text{und} \quad (A + B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-A^{-1}B)^k A^{-1}. \qquad (\textit{Hinweis:}\ \text{Neumannsche Reihe}).$$

(b) Es sei $A \in X$. Zeigen Sie: Die Abbildung inv ist bei A differenzierbar und die Ableitung bei A ist gegeben durch

$$D(\mathrm{inv})|_A B = -A^{-1}BA^{-1} \quad \text{für alle } B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Hinweis: Zeigen Sie $\|(A + B)^{-1} - (A^{-1} - A^{-1}BA^{-1})\| = o(\|B\|)$ für $\|B\| \to 0$.

(c) In Anlehnung an Kapitel 1 der Vorlesung definieren wir die relative Kondition von inv bei A durch

$$\kappa_A(\mathrm{inv}) := \|D(\mathrm{inv})|_A\| \frac{\|A\|}{\|\mathrm{inv}(A)\|}.$$

Zeigen Sie $\kappa_A(\mathrm{inv}) \le \mathrm{cond}(A)$.

Hinweis: Die Operatornorm einer Abbildung $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert durch $\|F\| := \sup_{B\in\mathbb{R}^{n\times n}\setminus\{0\}} \frac{\|FB\|}{\|B\|}$

Aufgabe 7.2: Matrizen Beweisen Sie:

- Für eine reguläre obere rechte Dreiecksmatrix R ist R^{-1} wieder von dieser Gestalt.
- Für eine untere linke rechte Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonalen ist L^{-1} wieder von dieser Gestalt.
- Die Inverse G^{-1} der Frobenius-Matrix

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \alpha_1 & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & \alpha_\ell & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{erfüllt} \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -\alpha_1 & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -\alpha_\ell & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 7.3: Gauß-Elmination, LR-Zerlegung, lineare Algebra Gegeben seien

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 18 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des folgenden LGS $Mx = b$ mithilfe der Gauß-Elimination.

(b) Berechnen Sie eine LR-Zerlegung von A der Form $A = LR$ (also mit $P = I$), sofern diese existiert.

(c) Zeigen Sie $\det L = 1$ und berechnen Sie die Determinante von A.

(d) Es ist bekannt, dass $\lambda = 6$ ein Eigenwert von A ist. Bestimmen Sie die übrigen Eigenwerte von A, ohne das charakteristische Polynom zu berechnen.

Aufgabe 7.4: Komplexität der Gauß-Elimination

Zeigen Sie, dass für die Gauß-Elimination von n-dimensionalen regulären Matrizen $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$ arithmetische Operationen ausreichen. *Hinweis:* Die Formel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n(n + 1)(2n + 1))/6 = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$ kann an geeigneter Stelle verwendet werden.