Friedrich-Schiller-Universität Jena, Winter 2019/20 Besprechung: **12.12.2019**
Einführung in die Numerische Mathematik und das Wissenschaftliche Rechnen
Prof. Dr. Dietmar Gallistl

Übung Nr. 8

Aufgabe 8.1: Cholesky-Zerlegung

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit und symmetrisch. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Gauß-Elimination ist für A ohne Zeilenvertauschungen durchführbar.

Hinweis: Sie können z.B. induktiv vorgehen. Zeigen Sie, dass Symmetrie für die nach einem Gauß-Schritt entstehende $(n-1)\times(n-1)$ Untermatrix $\tilde{A}$ erhalten bleibt. Um positive Definitheit von $\tilde{A}$ zu zeigen, zeigen Sie $x^*Ax > 0$ für alle $x = [x_2,\dots,x_n] \in \mathbb{R}^{n-1}$, indem Sie x durch Hinzufügen von $x_1 = -(1/A_{11})\sum_{\ell=2}^n A_{1,\ell}x_\ell$ zu $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ erweitern und die positive Definitheit von A nutzen. Zeigen Sie hierzu $x^*\tilde{A}x = \hat{x}^*A\hat{x}$.

(b) Die Matrix A besitzt eine LR-Zerlegung der Form $A = LR$ und die Matrizen L und R sind eindeutig.

(c) Es existiert eine linke untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Einsen auf der Diagonalen, eine rechte obere Dreiecksmatrix $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Einsen auf der Diagonalen sowie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ derart, dass $A = LD\tilde{R}$.

(d) Es existiert eine linke untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Einsen auf der Diagonalen sowie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ derart, dass $A = LDL^*$.

Aufgabe 8.2: QR-Zerlegung mit Householder

Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

mit dem Householder-Verfahren.

Aufgabe 8.3: Eigenschaften von Orthogonalprojektionen und Spiegelungen

Es sei $v \in \mathbb{K}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$. Zeigen Sie für $P := I - vv^*$ und $S := I - 2vv^*$:

(a) $v \in \mathrm{Kern}(P)$

(b) $\forall w \in \mathrm{Bild}(P): \quad \langle w, v\rangle_2 = 0$

(c) $\forall w \in \mathbb{K}^n: \quad Pw = PPw$

(d) $\forall w \in \mathbb{K}^n \quad \langle Pw, (I-P)w\rangle_2 = 0$

(e) $\mathrm{Rang}(P) = n-1$

(f) $\mathrm{Rang}(S) = n$

(g) $\forall w \in \mathbb{K}^n\ \forall k \in \mathbb{N}_0: \quad S^k w = Pw + (-1)^k(I-P)w$

(h) Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ folgendes ein: $v := (1/5)\cdot(0,3,4)$, $\mathrm{Bild}(P)$, Pv, Sv.

Aufgabe 8.4: Ausgleichsrechnung

In einem physikalischen Versuch sollen die Parameter $p = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ einer Parabel der Form

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

ermittelt werden. Folgende Messwerte liegen vor

$x =$	2	3	4	5
$y =$	90	75	65	40

(a) Stellen Sie ein (ggf. überbestimmtes) LGS für p auf.

(b) Bestimmen Sie die optimalen Parameter $\tilde{p} = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \in \mathbb{R}^3$ im Sinne der Kleinste-Quadrate-Lösung. (Auftretende LGS können Sie mit dem Rechner lösen).

(c) Stellen Sie die ermittelte Parabel graphisch dar. Zeichnen Sie auch die Messwerte in das Diagramm ein.