Übung Nr. 9

Aufgabe 9.1: Spektralradius

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Spektralradius $\rho(A)$. Es ist bekannt, dass A eine Faktorisierung der Form $A = T^{-1}RT$ mit T regulär und R in oberer Dreiecksgestalt besitzt. Die Diagonalelemente von R sind genau die Eigenwerte von A (Jordan-Zerlegung).

Es sei $0 < \delta \leq 1$. Wir definieren folgende Matrizen

$$S_\delta := \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \delta & & & \\ & & \delta^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \delta^{n-1} \end{bmatrix}, \quad R := \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad R_0 := \begin{bmatrix} r_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad R_\delta := S_\delta^{-1} R S_\delta.$$

(a) Berechnen Sie die Gestalt der Matrix Q_δ, die $R_\delta = R_0 + \delta Q_\delta$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie: Durch
$$\|x\|_\delta := \|S_\delta^{-1} T x\|_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$
ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ erklärt.

(c) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie für $y := S_\delta^{-1} T x$, dass $\|Ax\|_\delta = \|R_\delta y\|_2$.

(d) Zeigen Sie $\|Ax\|_\delta \leq (\rho(A) + \delta\mu)\|x\|_\delta$ für die Konstante $\mu = \|R\|_{\mathrm{F}}$ ($\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ bezeichnet die Frobenius-Norm).
Hinweis: Nutzen Sie Teil (a) und die Dreiecksungleichung.

(e) Beweisen Sie nun folgende Aussage aus der Vorlesung: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Matrizennorm $\|\cdot\|_\varepsilon$ mit
$$\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Aufgabe 9.2: Fixpunktiteration

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Spektralradius $\rho(A)$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Für jede natürliche Matrizennorm $\|\cdot\|$ gilt $\rho(A) \leq \|A\|$.

(b) Es ist $\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$ genau dann, wenn $\rho(A) < 1$. *Hinweis:* Sie können Aufgabe 9.1(e) benutzen.

Aufgabe 9.3: Energieminimierung, Energienorm

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Auf $\mathbb{R}^n$ ist die Funktion f erklärt durch
$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle_2 - \langle x, b\rangle_2 \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f.

(b) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$, dass $Ax = b$ genau dann gilt, wenn $f(x) = \min_{z\in\mathbb{R}^n} f(z)$.

(c) Zeigen Sie außerdem, dass durch $\|x\|_A := \langle x, Ax\rangle_2^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ erklärt ist.

Aufgabe 9.4: Iterative Löser

Untersuchen Sie für die folgenden beiden Matrizen
$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$
ob die Jacobi- oder die Gauß-Seidel-Iteration (für die Lösung von $A_j x = b$) konvergent ist.

Hinweis: Schätzen Sie den Spektralradius der Iterierten ab oder wenden Sie die Konvergenzkriterien aus der Vorlesung an.