Friedrich-Schiller-Universität Jena, Winter 2019/20 Besprechung: **09.01.2020**
Einführung in die Numerische Mathematik und das Wissenschaftliche Rechnen
Prof. Dr. Dietmar Gallistl

Übung Nr. 10

Aufgabe 10.1: Kondition von s. p. d. Matrizen Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie

(a) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ^2 Eigenwert von A^*A ist.

(b) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ^{-1} Eigenwert von A^{-1} ist.

(c) Es ist $\|A\|_2 = \lambda_{\max}$ für den betragsgrößten Eigenwert $\lambda_{\max}$ von A.

(d) Es ist $\operatorname{cond}_2(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, wobei $\lambda_{\min}$ den betragskleinsten Eigenwert von A bezeichnet.

Aufgabe 10.2: Lemma von Kantorowitsch

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit mit Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ und $\kappa := \operatorname{cond}_2(A)$. Beweisen Sie:

(a) Es sei $\mu := \sqrt{\lambda_1\lambda_n}$. Dann gilt für alle $n \in \{1,\dots,n\}$

$\kappa^{-1/2} \leq \lambda_j/\mu \leq \kappa^{1/2}$ und $\lambda_j/\mu + \mu/\lambda_j \leq \kappa^{1/2} + \kappa^{-1/2}$ (*Hinweis:* Monotonieeigenschaften von $z \mapsto z + z^{-1}$).

(b) Die Eigenvektoren von $\mu^{-1}A + \mu A^{-1}$ sind diejenigen von A. Die zugehörigen Eigenwerte sind höchstens $\kappa^{1/2} + \kappa^{-1/2}$.

(c) Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt

$$\mu^{-1}\langle x, Ax\rangle_2 + \mu\langle x, A^{-1}x\rangle_2 \leq (\kappa^{1/2} + \kappa^{-1/2})\|x\|_2^2 \quad (\textit{Hinweis: } \text{Aufgabe 10.1}).$$

(d) Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\dfrac{\langle x, Ax\rangle_2\langle x, A^{-1}x\rangle_2}{\|x\|_2^4} \leq \left(\dfrac{1}{2}\kappa^{1/2} + \dfrac{1}{2}\kappa^{-1/2}\right)^2.$

Hinweis: Zeigen Sie ggf. zunächst $4ab \leq (|a| + |b|)^2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10.3: Konvergenz des Gradientenverfahrens

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.p.d, $b \in \mathbb{R}^n$ und $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle_2 - \langle x, b\rangle_2$. Mit $x_\star$ sei die Lösung von $Ax_\star = b$ bezeichnet; x_k seien die Iterierten des Gradientenverfahrens und $d_k = -\nabla f(x_k)$. Beweisen Sie:

(a) Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt $f(x) = f(x_\star) + \frac{1}{2}\|x - x_\star\|_A^2$.

(b) Es gilt $f(x_{k+1}) = f(x_k) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\|d_k\|_2^4}{\langle d_k, Ad_k\rangle_2}$.

(c) Es gelten die Identitäten $d_k = -A(x_k - x_\star)$ und $\|x_k - x_\star\|_A^2 = \langle d_k, A^{-1}d_k\rangle_2$ sowie

$$\|x_{k+1} - x_\star\|_A^2 = \|x_k - x_\star\|_A^2 - \frac{\|d_k\|_2^4}{\langle d_k, Ad_k\rangle_2} \quad \text{und} \quad \|x_{k+1} - x_\star\|_A^2 = \|x_k - x_\star\|_A^2\left[1 - \frac{\|d_k\|_2^4}{\langle d_k, Ad_k\rangle_2\langle d_k A^{-1}d_k\rangle_2}\right].$$

(d) Das Gradientenverfahren erfüllt die Fehlerabschätzung (*Hinweis:* Kantorowitsch-Lemma)

$$\|x_k - x_\star\|_A \leq \left(\frac{\operatorname{cond}_2(A) - 1}{\operatorname{cond}_2(A) + 1}\right)^k \|x_0 - x_\star\|_A.$$