Friedrich-Schiller-Universität Jena, Winter 2019/20 Besprechung: **16.01.2020**
Einführung in die Numerische Mathematik und das Wissenschaftliche Rechnen
Prof. Dr. Dietmar Gallistl

# Übung Nr. 11

## Aufgabe 11.1: Approximation der Inversen mit der Fixpunktiteration

Zur Berechnung der Inversen $A^{-1}$ einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird folgende Fixpunktiteration betrachtet

$$X^{(k+1)} = X^{(k)}(I - AC) + C \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{für ein reguläres } C \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Zeigen Sie, dass das Verfahren für $\|I - AC\| \le q < 1$ gegen $A^{-1}$ konvergiert und folgende Abschätzung erfüllt

$$\|X^{(k)} - A^{-1}\| \le q^k \|X^{(0)} - A^{-1}\|, \quad k \ge 0.$$

## Aufgabe 11.2: Verfahren von Schulz zur Matrizeninvertierung

Zur Berechnung der Inversen $A^{-1}$ einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird folgende Fixpunktiteration betrachtet

$$X^{(k+1)} = X^{(k)}(2I - AX^{(k)}) \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Methode unter der Bedingung $\|I - AX^{(0)}\| \le q < 1$ gegen $A^{-1}$ konvergiert und folgende Abschätzung erfüllt

$$\|X^{(k)} - A^{-1}\| \le \frac{\|X^{(0)}\|}{1-q}\|I - AX^{(k)}\| \le q^{(2^k)}\frac{\|X^{(0)}\|}{1-q}, \quad k \ge 0.$$

(*Hinweis:* Neumannsche Reihe)

(b) Zeigen Sie, dass dieses Verfahren mit dem Newton-Verfahren übereinstimmt. (*Hinweis:* Darstellung der Ableitung der Inversenbildung aus früherer Übung.)

## Aufgabe 11.3: Nichtlineare Gleichungen

Gegeben sei das nichtlineare Problem

$$x_1^2 + x_2^2 = 2 \quad \text{und} \quad x_1^2 - x_2^2 = 1$$

(Schnittpunkte eines Kreises und einer Hyperbel).

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen analytisch.

(b) Schreiben Sie die Aufgabe als Nullstellenproblem für geeignetes $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Iterierten des Newton-Verfahrens ausgehend von $x^{(0)} = (1, 1)$ bis das Inkrement $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty < 0.002$ erfüllt.

(c) Bestimmen Sie zu $f$ aus (b) eine Matrix

$$C = \begin{bmatrix} c & c \\ c & -c \end{bmatrix} \quad \text{mit } c \neq 0$$

derart, dass die Fixpunktiteration

$$x^{k+1} = x^k - Cf(x^{(k)})$$

mit Startwert $x^{(0)} = (1, 1)$ garantiert gegen die Nullstelle $z$ von $f$ im Gebiet $\{x_1 \ge 0 \wedge x_2 \ge 0\}$ (erster Quadrant) konvergiert. Wie viele Schritte müsste man mit dieser Fixpunktiteration durchführen, damit $\|x^{(k)} - z\|_\infty \le 0.002$ erfüllt?

## Aufgabe 11.4: Wurzelberechnung

Es sei $a > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass für jeden beliebigen Startwert $x_0 > 0$ die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 3ax_k}{3x_k^2 + a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

monoton gegen $z = \sqrt{a}$ konvergiert. Wie groß ist die lokale Konvergenzordnung? Überprüfen Sie das theoretische Ergebnis in einem numerischen Test für $a = 100$.