Friedrich-Schiller-Universität Jena, Winter 2019/20 Besprechung: **23.01.2020**
Einführung in die Numerische Mathematik und das Wissenschaftliche Rechnen
Prof. Dr. Dietmar Gallistl

Übung Nr. 12

Aufgabe 12.1: Divergente Newton-Iteration

Konstruieren Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Newton-Iterierte zyklisch die Werte $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ und jeweils die Funktionswerte $y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 1$ annimmt.

Aufgabe 12.2: Eigenwertberechnung mit dem Newton-Verfahren

Die Eigenwertaufgabe $Ax = \lambda x$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich wie folgt als nichtlineares System für die Unbekannten $x_1, \dots, x_n, \lambda$ schreiben

$$Ax - \lambda x = 0, \quad \|x\|_2^2 - 1 = 0.$$

(a) Geben Sie die Newton-Iteration hierfür an.

(b) Führen Sie mindestens zwei Newton-Schritte zur Eigenwertberechnung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

mit den Startwerten $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 1.5$, $\lambda^{(0)} = 3.5$ durch. Prüfen Sie, ob quadratische Konvergenz vorliegt.

(c) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 3 \\ 4 & 29 & 2 \\ 3 & 2 & 42 \end{bmatrix}.$$

Ermitteln Sie geeignete Startwerte und berechnen Sie alle Eigenpaare von A näherungsweise (mit je 2 Newton-Iterationen). Dokumentieren Sie auch die Residuen $Ax^{(k)} - \lambda^{(k)}x^{(k)}$.

Hinweis: Auftretende LGS können Sie mit beliebigen Hilfsmitteln Ihrer Wahl lösen.

Aufgabe 12.3: Globale Konvergenz des Newton-Verfahrens

Die Funktion $f \in C^1([a, b])$ sei streng monoton wachsend und konvex mit $f(a) < 0 < f(b)$. Zeigen Sie, dass für jeden Startwert x_0 rechts der eindeutig bestimmten Nullstelle x die Näherungen x_k des Newton-Verfahrens monoton von rechts gegen x konvergieren.

Aufgabe 12.4: Gedämpftes Newton-Verfahren

Die Abbildung $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei gleichmäßig monoton. Das bedeutet, dass $0 < \alpha < \infty$ existiert mit

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \alpha\|x - y\|_2^2 \le \langle G(x) - G(y), x - y\rangle_2.$$

Ferner sei G Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L und $\rho > 0$ erfülle

$$0 < \rho \le q := \sqrt{1 - \alpha^2/L^2}.$$

Schließlich sei für gegebenes $b \in \mathbb{R}^n$ folgende Abbildung definiert

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto x + \rho(b - G(x)).$$

(a) Zeigen Sie $\rho < 1$.

(b) Für welche $\rho > 0$ ist Φ eine Kontraktion? Wie wählt man ρ optimal unter den obigen Voraussetzungen?

(c) Die C^2-Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei strikt konvex mit D^2F s.p.d. in $\mathbb{R}^n$ und kleinstem Eigenwert $\lambda(D^2\Phi) \ge \alpha > 0$, ferner sei DF global Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass die Abbildung $G(x) := DF(x)$ die Voraussetzungen aus (a) erfüllt.