Friedrich-Schiller-Universität Jena, Winter 2019/20 Besprechung: **30.01.2020**
Einführung in die Numerische Mathematik und das Wissenschaftliche Rechnen
Prof. Dr. Dietmar Gallistl

Übung Nr. 13

Aufgabe 13.1: Polynomnullstellen

Es sei $p \in P_n$ ein komplexes Polynom vom Grade n mit führendem Koeffizienten 1. Für die Menge $G \subseteq \mathbb{C}^n$ der komplexen n-Tupel mit paarweise verschiedenen Einträgen und einen Startwert $z^{(0)} \in G$ wird das komplexe Polynom $\omega(z^{(k)}) \in P_n$ definiert als das Produkt aller Linearfaktoren

$$\omega(z^{(k)})(\zeta) = \prod_{j=1}^{n} (\zeta - z_j^{(k)})$$

für die aktuelle Näherung $z^{(k)} = (z_1^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)})$ im Schritt k. Diese wird wie folgt konstruiert. Es seien $L_1, \ldots, L_n : P_{n-1} \to \mathbb{C}$ linear unabhängige lineare Funktionale (also linear unabhängige Elemente des Dualraums von P_{n-1}) gegeben. Definiere

$$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad f(z) := (L_1(p - \omega(z)), \ldots, L_n(p - \omega(z)))$$

(man beachte $p - \omega(z) \in P_{n-1}$). Dann setzt man

$$w^{(k)} := Df(z^{(k)})^{-1} f(z^{(k)}) \quad \text{und} \quad z^{(k+1)} := z^{(k)} - w^{(k)}.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungsmatrix $Df(z^{(k)})$ und zeigen Sie, dass diese regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Aufdatierung $w^{(k)}$ mit den sog. "Weierstraß-Korrektoren" übereinstimmt, also

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad w_j^{(k)} = \frac{p(z_j^{(k)})}{\prod_{\ell \neq j} (z_j^{(k)} - z_\ell^{(k)})}.$$

(*Bemerkung:* Dies zeigt, dass das Weierstraß-Verfahren zur simultanen Berechnung aller einfachen Nullstellen eines Polynoms ein Newton-Verfahren und damit lokal quadratisch konvergent ist).

Erinnerung: Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass $q \in P_{n-1}$ genau dann null ist, wenn q im Kern n linear unabhängiger linearer Funktionale ist.

Aufgabe 13.2: Gauß-Newton-Verfahren

Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $m \geq n$ gegeben. Die Suche nach einer verallgemeinerten Lösung der überbestimmten Gleichung $F(x) = 0$ führt auf das nichtlineare Problem

$$\text{minimiere } g(x) := \|F(x)\|_2^2 \quad \text{über } \mathbb{R}^n.$$

(a) Zeigen Sie: das Minimum $x_\star$ löst $DF(x_\star)^* F(x_\star) = 0$.

(b) Geben Sie das Newton-Verfahren (basierend auf dieser notwendigen Bedingung) zur Lösung dieses Problems an unter Vernachlässigung der zweiten Ableitung $D^2 F$.

(c) Schreiben Sie das Newton-Verfahren unter Verwendung der Pseudoinversen $DF(x^{(k)})^+$.

(d) Zeigen Sie, dass im Falle $m = n$ wieder das klassische Newton-Verfahren ensteht.

(e) Zeigen Sie, dass im Falle einer linearen Abbildung $F(x) = Ax - b$ die Gaußsche Normalgleichung zurückgewonnen wird.

Aufgabe 13.3: QR-Zerlegung Beweisen Sie:

(a) Die QR-Zerlegung einer regulären quadratischen Matrix existiert und ist eindeutig, wenn man fordert, dass die Diagonalelemente von R positiv und reell sind.

(b) Es sei $\left(A^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge regulärer Matrizen in $\mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\lim_{k \to \infty} A^{(k)} = I_{n \times n}$ (Einheitsmatrix). Es seien für jedes $k \in \mathbb{N}$ jeweils QR-Zerlegungen $A^{(k)} = Q^{(k)} R^{(k)}$ gegeben, wobei die Matrizen $R^{(k)}$ nur reelle, positive Diagonalelemente besitzen mögen. Beweisen Sie, dass $\lim_{k \to \infty} Q^{(k)} = I_{n \times n}$ und $\lim_{k \to \infty} R^{(k)} = I_{n \times n}$.