Pseudoklausur 1

Dieser Selbsttest enthält realistische Klausuraufgaben, allerdings mehr Material, als in einer 90-minütigen Klausur Platz findet. Richtwert wären etwa 4 Aufgaben.
Erlaubte Hilfsmittel: Alles in Papierform (Bücher, Skript, Notizen, ...)

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die Iteration

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x^2 - 2}{10}$$

für jeden Startwert $x_0 \in (0, 5)$ gegen den Grenzwert $x_* = \sqrt{2}$ konvergiert. Beweisen Sie, dass für beliebiges $\delta \in (0, \frac{1}{10})$ die asymptotische lineare Konvergenzrate mindestens $1 - \sqrt{2}/(5 + \delta)$ beträgt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ und $b \in \mathbb{R}^3$.

(i) Zeigen Sie: $A - 5I_{3\times3} = M$ mit $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(ii) Beweisen Sie, dass die Iteration $x_{k+1} = \dfrac{1}{5}b - \dfrac{1}{5}Mx_k$ für jeden Startwert x_0 gegen die Lösung x konvergiert.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Gegeben sei das Intervall $[a, b]$ mit $a = 0$ und $b = 3$ mit den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

(i) Geben Sie die Lagrange-Basis von P_2 bezüglich dieser Punkte an.

(ii) Geben Sie die Gewichte $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ für eine Quadraturformel $\tilde{I}(f) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j f(x_j)$ an, die alle quadratischen Polynome $f \in P_2$ exakt integriert.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** (i) Geben Sie eine Orthonormalbasis des Raumes der $P_1([0, 1])$ der Polynome ersten Grades über $[0, 1]$ bezüglich des Skalarprodukts $(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ an.

(ii) Gegeben sei f durch $f(x) = 24x^2 - 24x + 6$. Berechnen Sie die beste Approximation von f in $p \in P_1([0, 1])$ bezüglich der Norm $\|g\| := \sqrt{(g, g)}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Gegeben jeweils eine kurze Antwort mit Beweis oder Gegenbeispiel.

1. Wahr oder falsch? Das Newton-Verfahren konvergiert für beliebige Startwerte.

2. Wie viele Quadraturpunkte reichen aus, um alle Polynome des Grades 6 exakt zu integrieren?

3. Ist die Polynominterpolation durch Polynome des Grades n eine stetige Operation von $C([-1, 1])$ nach $C([-1, 1])$ unter der Maximumnorm? Wenn ja: Hängt die Stetigkeit von quantitativ n ab? Wenn nein: Welche andere Norm garantiert Stetigkeit?

4. Wahr oder falsch? Ist der Spektralradius $\rho(M)$ einer symmetrischen Matrix M gleich 1, so konvergiert $\|M^k\|$ für $k \to \infty$ unter keinen Umständen gegen 0.

5. Wir betrachten die beiden linearen Funktionale F, G über dem Raum $C([0, 1])$ der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$:

$$F : f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt \quad \text{und} \quad G : f \mapsto \frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}f(1).$$

   Sind F, G

   - als lineare Funktionale über $C([0, 1])$ linear unabhängig?
   - als lineare Funktionale über dem Raum der quadratischen Funktionen über $[0, 1]$ linear unabhängig?