Pseudoklausur 3

Dieser Selbsttest enthält realistische Aufgaben für eine 90-minütigen Klausur. Zum Bestehen genügen 12.5 von 25 Punkten.
Erlaubte Hilfsmittel: Alles in Papierform (Bücher, Skript, Notizen, ...)

Aufgabe 1 (2+4 Punkte). Auf $\Omega = (-1, 1)$ betrachten wir die Funktionen $\varphi_1(x) = 1-|x|$, $\varphi_2(x) = 1-x^2$ und deren lineare Hülle

$$X := \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq H_0^1(\Omega),$$

sowie $f(x) = -12x^2$ und die Funktion $u(x) = x^4 - 1$, die $-u'' = f$ erfüllt.

(a) Beweisen Sie die Inklusion $X \subseteq H_0^1(\Omega)$.

(b) Bestimmen Sie die Finite-Elemente-Approximation u_h von u in X.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Bestimmen Sie die Kleinste-Quadrate-Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ von

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3 (3+1+1 Punkte). (a) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \frac{6}{7}x + \frac{128}{7}x^{-6} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

für jedes $x_0 > 2 \cdot (6/13)^{1/7}$ mit linearer Geschwindigkeit gegen 2 konvergiert.

(b) Ziegen Sie, dass die Konvergenz sogar für jedes $x_0 > 0$ gilt.

(c) Konvergiert die Folge quadratisch?

Aufgabe 4 (1+2+2 Punkte). Gegeben seien die Punkte $x_0 = 0, x_1 = 1/4, x_2 = 1/2, x_3 = 3/4, x_4 = 1$ im Intervall $[0, 1]$.

(a) Geben Sie die Lagrange-Basispolynome von P_4 bezüglich dieser Punkte an.

(b) Berechnen Sie die Gewichte $\alpha_0, \ldots, \alpha_4$ einer Quadraturformel $\tilde{I}(f) = \sum_{j=0}^{4} \alpha_j f(x_j)$, die alle Polynome $f \in P_4$ exakt über $[0, 1]$ integriert.

(c) Beweisen Sie, dass $\tilde{I}$ sogar für alle $f \in P_5$, nicht jedoch für alle $f \in P_6$ exakt ist.

Aufgabe 5 (1+1+1+1+2+1=7 Punkte). Gegeben jeweils eine kurze Antwort mit Begründung oder Gegenbeispiel.

1. Es sei f derart gegeben, dass das Newton-Verfahren für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergent ist. Kann man x_0 so wählen, dass das Verfahren nicht mehr superlinear konvergiert?
2. Interpolatorische Quadraturformeln: Wie viele Quadraturpunkte braucht man mindestens, um $\int_0^{95} f(x)e^{94\sqrt{x}}dx$ für alle Polynome f des Grades 96 exakt zu integrieren?
3. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit mit Spektralkondition $\kappa_2(A) = 1$. Geben Sie eine möglichst kleine Zahl $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ an, nach der die cg-Approximation x_k an die Lösung von $Ax = b$ bei Rechnung in exakter Arithmetik mit x übereinstimmt.
4. Berechnen Sie die schwache Ableitung der Funktion $f(x) = \max\{\frac{1}{2} - \frac{x}{2}, x^2, x^4\}$ auf $(0, 2)$.
5. Sind die linearen Funktionale $F_1(g) = \int_{-1}^{1} g'(x)\,dx$ und $F_2(g) = g(1) - g(0)$ über dem Raum P_1 linear unabhängig? Sind sie es über P_2?
6. Hängt die Stabilität der orthogonalen Projektion auf einen Unterraum U von der Dimension von U ab?