04,07,2022) LA II) P.ü)

Satz:

Sei F ein endlich erzeugter freier Modul über einen HIR R. Sei außerdem $M \subset F$ ein Untermodul. Dann existieren Elemente $x_1, \dots, x_s \in F$ & $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in R \setminus \{0\}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $x_1, \dots, x_n$ sind Teil einer Basis von F.

ii) $\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_s x_s$ bilden eine Basis von M.

iii) Es gilt für alle $i \in \{1, \dots, s-1\}$: $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$

Außerdem sind die $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ bis auf Assoziiertheit eindeutig durch M bestimmt (unabhängig von der Wahl der $x_1, \dots, x_s$) und man nennt diese Elemente dann die Elementarteiler von $M \subset F$.

Lemma: (Elementarteilersatz für Matrizen)

Sei R ein HIR & $A = (\alpha_{ij})_{ij} \in R^{m \times n}$. Dann gibt es Matrizen $S \in GL(m,R)$ & $T \in GL(n,R)$, so dass gilt

$$S \cdot A \cdot T = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_s) & 0^{s \times (n-s)} \\ \hline 0^{(m-s) \times s} & 0^{(m-s) \times (n-s)} \end{array} \right) \in R^{m \times n}.$$

Dabei erfüllen außerdem die Einträge $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in R \setminus \{0\}$ $(0 \leq s \leq \min(m,n))$ für $i \in \{1, \dots, s-1\}$ die Bedingung $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$.

Diese Elemente nennt man dann die Elementarteiler der Matrix A.

Bsp. 1)

Betrachte den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}^3$. Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Z}^3$ und der Untermodul $M \subset \mathbb{Z}^3$ wie folgt definiert:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{Z}}$$

Finde ~~$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^3$~~ eine Basis x_1, x_2, x_3 von $\mathbb{Z}^3$ & diejenigen Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$, so dass ~~$\alpha_1 x_1, \alpha_2, \alpha_3$ eine~~ $\alpha_1 x_1$, $\alpha_2 x_2$, $\alpha_3 x_3$ eine Basis von M bilden.

Lösung:

Dazu betrachten wir die lineare Abbildung, dargestellt durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

welche offensichtlich die Standard Basis von $\mathbb{Z}^3$ auf das Erzeugendensystem v_1, v_2, v_3 von M abbildet.

Wir bestimmen außerdem S & T, so dass

$$SAT = A'$$

(SAT wie in Lemma)

! Um S & T gleich zusätzlich zu A' zu erhalten, setzen wir $S_0 := T_0 := E_3$ (wobei E_3 die (3×3)-Einheitsmatrix bezeichnet) und betrachten das ~~s~~ erweiterte System

$$(S_0|A|T_0).$$

Wir wenden dann alle Operationen, die Zeilen (Spalten) betreffen, zusätzlich auf S_0 (T_0) an & bekommen so die gewünschten Transformationsmatrizen gleich mit dazu.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & -7 & + & & & & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 8 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 14 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 8 & -56 & 2 & 1 & -7 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{c} -8,\ + \quad 2,\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 7 & + & & & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 14 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 2 & -56 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 2 & -42 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{c} \cdot(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 0 & 0 & -42 & 1 & 0 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 0 & 0 & 42 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

- Wir erhalten also die Elementarteiler $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ & $\alpha_3 = 42$ & zusätzlich die Transformationsmatrizen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da nun S^{-1} gerade von der Standardbasis in die neue Basis wechselt, haben wir

$$x_1 := \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad \alpha_1 x_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 x_3 = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bsp. 2)

Wir suchen ganzzahlige Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= 62 \\ -2x_1 \qquad\quad - 2x_3 &= -2 \\ 7x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Lösung:

Wir können die natürlich auch in Matrixschreibweise ausdrücken

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 62 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} =: y$$

Dabei ist A gerade die Matrix aus Beispiel 1.

$\Rightarrow$

$$A' \underbrace{T^{-1} x}_{x'} = \underbrace{S y}_{y'}$$

$$A' \cdot x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} \cdot x' = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 42 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} 62 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun betrachten wir mit Hilfe von T die gesuchte 7

Lösung x:

$$x = Tx' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{x_1 = -9,\ x_2 = -1,\ x_3 = 10}$$

Bsp. 3)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} X & 2X \\ 0 & X+1 \\ X^2-X & 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}[X])^{3\times 2}$$

Bstimmen Sie ~~des~~ die Elementarteiler inklusive der Transformationsmatrizen.

Lösung:

! Beachte, dass den Polynomring $\mathbb{R}[X]$ über den reellen Zahlen ein euklidischer Ring ist.

$$\begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & X & 2X & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & X^2-X & 0 & & \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{c} -2 \longrightarrow + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & X & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & X^2-X & -2X^2+2X & & \end{array}\right) \quad -(X-1),\ +$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & X & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X+1 & 0 & 1 \\ -X+1 & 0 & 1 & 0 & -2X^2+2X & & \end{array}\right) \quad +$$

$$\begin{array}{ccc} & -1 \quad\quad + & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & X & X+1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X+1 & 1 & -2 \\ -X+1 & 0 & 1 & 0 & -2X^2+2X & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & X & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X+1 & 1 & -3 \\ -X+1 & 0 & 1 & 0 & -2X^2+2X & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} & -X \quad\quad + & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & X & & \\ 0 & 1 & 0 & X+1 & 0 & -3 & 1 \\ -X+1 & 0 & 1 & -2X^2+2X & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1+3X \\ 0 & 1 & 0 & X+1 & -X^2-X & & \\ -X+1 & 0 & 1 & -2X^2+2X & 2X^3-2X^2 & 1 & -X \end{array}\right)\begin{array}{l} -(X+1) \\ \\ + \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1+3X \\ -X-1 & -X & 0 & 0 & -X^2-X & & \\ -X+1 & 0 & 1 & -2X^2+2X & 2X^3-2X^2 & 1 & -X \end{array}\right)\begin{array}{l} (-2X^2+2X) \\ \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & \\ -X-1 & -X & 0 & 0 & -X^2-X \;\; {}^{2X-4} & -3 & 1+3X \\ 2X^2-3X+1 & 2X^2-2X & 1 & 0 & 2X^3-2X^2 \;\; {}_{+} & 1 & -X \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & \\ -X-1 & -X & 0 & 0 & -X^2-X & -3 & 1+3X \\ -X+5 & 2X & 1 & 0 & 4X & 1 & -X \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & \\ -X+5 & 2X & 1 & 0 & 4X \;\; {}^{1/4(X+1)} & -3 & 1+3X \\ -X-1 & -X & 0 & 0 & -X^2-X & 1 & -X \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & 4^{-1} & & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & \\ -X+5 & 2X & 1 & 0 & 4X & -3 & 1+3X \\ -\frac{1}{4}(X^2-1) & \frac{1}{2}(X^2-X) & \frac{1}{4}(X+1) & 0 & 0 & 1 & -X \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}X \\ -X+5 & 2X & 1 & 0 & X & 1 & -\frac{1}{4}X \\ -\frac{1}{4}(X^2-1) & \frac{1}{2}(X^2-X) & \frac{1}{4}(X+1) & 0 & 0 & & \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Die Elementarteiler $1, X \in \mathbb{R}[X]$ und die Transformation matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -X+5 & 2X & 1 \\ -\frac{1}{4}(X^2-1) & \frac{1}{2}(X^2-X) & \frac{1}{4}(X+1) \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}[X])^{3\times 3}$$

&

$$T = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{4}+\frac{3}{4}X \\ 1 & -\frac{1}{4}X \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}[X])^{2\times 2}$$