Aufgabe 1)

Man zeige, dass zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ genau dann ähnlich sind, wenn ihre Minimalpolynome sowie ihre charakteristische Polynome übereinsteimmen.

Lösung:

Gegeben sind zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, zu denen man jeweils das Minimalpolynom p_A bzw. p_B sowie das ~~das~~ charakteristische Polynom χ_A bzw. χ_B betrachte.

Strategie:

Seien zunächst A & B ähnlich, etwa $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$ mit einer invertierbaren Matrix $S \in GL(3, \mathbb{R})$.

Dann folgt

$$p_A(B) = S^{-1}\, p_A(A)\, S = 0$$

und damit

$$p_B \mid p_A \text{.}$$

Analog zeigt man

$$p_A \mid p_B$$

und erhält

$$\boxed{p_A = p_B \text{.}}$$

- Sei $S \in GL(n,K)$ (beliebig) mit $B = S^{-1}AS$.

Dann gilt aufgrund der Multiplikativität der Determinante

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det(TE - S^{-1}AS) \\ &= \det(S^{-1}(TE-A)S) \\ &= \det(S^{-1})\cdot\det(TE-A)\cdot\det(S) \\ &= \chi_A.\end{aligned}$$

- Wir nehmen nun $p_A = p_B$ & $\chi_A = \chi_B$ an, wobei wir zunächst von Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ über einem beliebigen Körper K und mit allgemeiner Zeilen- und Spaltenzahl n ausgehen. Sei $p_A = p_B = p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r}$ die Primfaktor-zerlegung mit paarweise verschiedenen Primpolynomen $p_1, \ldots, p_r \in K[T]$ und Exponenten $n_i > 0$.

Lemma:

Jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist ähnlich zu einer Matrix der Form $\mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_r)$ mit quadratischen Matritzen A_i, wobei A_i jeweils die Begleitmatrix zu einer Potenz q_i eines normierten Primpolynoms aus $K[T]$ ist. Die Matrizen $A_1, \ldots, A_r$ sind bis auf die Reihenfolge eindeutig durch A bestimmt.

Es gilt $p_A = \mathrm{kgV}(q_{t_1}, \ldots, q_{t_r})$ für das Minimalpolynom von A, sowie $\chi_A = q_{t_1} \cdots q_{t_r}$ für das charkteristische Polynom von A.

Lemma $\Rightarrow$ In der allgemeinen Normalform zu A wie auch in derjenigen zu B für jedes $i = 1, \ldots, r$ die Begleitmatrix zu $p_i^{n_i}$ muss mindestens einmal als Diagonalkästchen vorkommen.

- Ziel ist es nun zu zeigen, dass die allgemeinen Normalform zu A & B bis auf die Reihenfolge der Kästchen übereinstimmen.

1. Fall:

grad $p_A = 1$, etwa $p_A = T - \lambda$ mit einer Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $A = \mathrm{Diag}(\lambda, \lambda, \lambda)$, also besitzt A bereits allgemeine Normalform.

2. Fall:

grad $p_A = 2$. Es folgt, dass p_A reduziebel ist. Denn anderenfalls müsste χ_A eine Potenz von p_A sein, was aber aus Gradgründen ausgeschlossen ist. Sei also $p_A = (T - \lambda_1) \cdot (T - \lambda_2)$ mit Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$\lambda_1 = \lambda_2 \xRightarrow{\text{Lemma}}$ Die allgemeine Normalform zu A muss von der Form $\mathrm{Diag}(\lambda_1, N)$ sein, wobei N die ~~Begl~~

Begleitmatrix zu $(T-\lambda_1)^2$ ist. Gilt anderenfalls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ & etwa $\chi_A = (T-\lambda_1)^2 (T-\lambda_2)$.

Lemma
$\Longrightarrow$ Die allgemeine Normalform zu A ist von der Gestalt $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)$.

3. Fall:

$\operatorname{grad} p_A = 3$

Theorem:

Sei $f: V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V, sei $A = A_{f,X,X} \in K^{n\times n}$ die Matrix, welche f bezüglich einer gegebenen Basis X von V beschreibt, und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in K[T]$ mit $\alpha_j \mid \alpha_{j+1}$ diejenigen Elementarteiler der Matrix $TE - A \in K[T]^{n\times n}$, die nicht invertierbar sind; wir nehmen die α_j als normierte Polynome an. Weiter betrachten wir die Primfaktorzerlegungen

$\alpha_j = p_1^{n(1,j)} \cdots p_r^{n(r,j)}$, $j = 1, \dots, s$, der α_j mit paarweise verschiedenen normierten Primpolynomen $p_1, \dots, p_r \in K[T]$ und Exponenten $n(i,j) \geq 0$. Dann gilt:

(i) Fasse man V als $K[T]$-Modul unter f auf, so folgt

$$V \simeq \bigoplus_{j=1}^{s} K[T]/\alpha_j K[T] \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=1}^{s} K[T]/p_i^{n(i,j)} K[T]$$

und die letztere Zerlegung gibt Anlass zu einer Zerlegung von V in f-zyklische Untervektorräume.

(ii) Charakteristisches Polynom χ_f und Minimalpolynom p_f von f berechnen sich zu

$$\chi_f = \alpha_1 \cdots \alpha_s, \quad p_f = \alpha_s.$$

Wir wenden Theorem (ii) für den durch A definierten Endomorphismus $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ an. Aus Gradsgründen gilt $p_A = \chi_A$, und die ergibt mit Theorem (i), dass $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}[T]$-Modul isomorph zu $\mathbb{R}[T]/p_A\mathbb{R}[T]$, also f-zyklisch ist.

Lemma:

Es sei $f: V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums der Dimension $n < \infty$ und $p \in K[T]$ ein normiertes Polynom von Grad n.

Dann ist äquivalent:

(i) V ist f-zyklisch mit Minimalpolynom $p_f = p$.

(iii) Es existiert eine Basis X von V, so dass die Matrix die Begleitmatrix zu p ist.

Lemma $\Rightarrow$ Es existiert eine Basis X von $\mathbb{R}^3$, so dass die Matrix $A_{f,X,X}$ gerade die Begleitmatrix zu p_A ist.

- Wir sehen also, dass A jeweils zu einer Matrix äquivalent ist, deren Struktur lediglich von p_A & χ_A abhängt.

$\rightsquigarrow$ Da dasselbe auch für B anstelle von A gilt, können wir schließen, dass A & B ähnlich sind.

Frage:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Jordan'sche Normalform?

Antwort:

Die Jordan'sche Normalform lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Frage:

Sei $F: V \longrightarrow V$ ein Endomorphismuss eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass eine kleinste natürliche Zahl d mit

$0 < d \leqslant n = \dim V$ existiert, für die

$$\operatorname{im} F^{d+1} = \operatorname{im} F^d \;\&\; \ker F^{d+1} = \ker F^d$$

gilt.

Wieso gilt dann bereits $\underline{\operatorname{im} F^{d+j} = \operatorname{im} F^d}$ & $\ker F^{d+j} = \ker F^d$ für alle $j \in \mathbb{N}$?

Antwort:

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\operatorname{im} F^{k+1} \subseteq \operatorname{im} F^k$ & damit

$$n = \dim(\operatorname{im} F^0) \geqslant \cdots \geqslant \dim(\operatorname{im} F^k) \geqslant \dim(\operatorname{im} F^{k+1}) \geqslant 0.$$

Da diese Folge nicht endlos absteigen kann, muss an einer frühesten Stelle $\dim(\operatorname{im} F^{d+1}) = \dim(\operatorname{im} F^d)$ und folglich $\operatorname{im} F^{d+1} = \operatorname{im} F^d$ gelten. Daraus ergibt sich

$$F^{d+2}(V) = F^d(F^{d+1}(V)) = F(F(V)) = F^{d+1}(V) = F(V).$$

Induktion $\Rightarrow F^{d+j}(V) = F^d(V) \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Die Behauptungen für den Kern von F^d folgen aus Dimensionsformel unter Benutzung von

$$\ker(F^{k+1}) \supseteq \ker(F^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Frage:

~~Z.z.~~ Sei $d = \min\{l \in \mathbb{N};\ \operatorname{im} F^l = \operatorname{im} F^{l+1}\}$

Z.Z:

$$V = \operatorname{im} F^d \oplus \ker F^d,$$

& dass die Räume $\operatorname{im} F^d$ & $\ker F^d$ F-invariant sind?

Antwort:

Wegen $\operatorname{im} F^{d+1} = \operatorname{im} F^d$ bzw. $\ker F^{d+1} = \ker F^d$ erhält man

$v \in \operatorname{im} F^d \Rightarrow F(v) \in \operatorname{im} F^{d+1} \Rightarrow F(v) \in \operatorname{im} F^d$ &

$v \in \ker F^d \Rightarrow v \in \ker F^{d+1} \Longrightarrow F^{d+1}(v) = F^d(F(v)) = 0$

$\Longrightarrow F(v) \in \ker F^d$.

$\Rightarrow$ Die Räume $\operatorname{im} F^d$ & $\ker F^d$ sind F-invariant.

Sei $v \in \operatorname{im} F^d \cap \ker F^d$.

$\Rightarrow v = F^d(w)$ für ein $w \in V$ sowie $F^d(v) = F^{2d}(w) = 0$

und lediglich $w \in \ker F^{2d} = \ker F^d$.

$\Rightarrow v = F(w) = 0 \Rightarrow \operatorname{im} F^d + \ker F^d$ ist eine direkte Summe.

Dimensionsformel $\Rightarrow V = \operatorname{im} F^d \oplus \ker F^d$