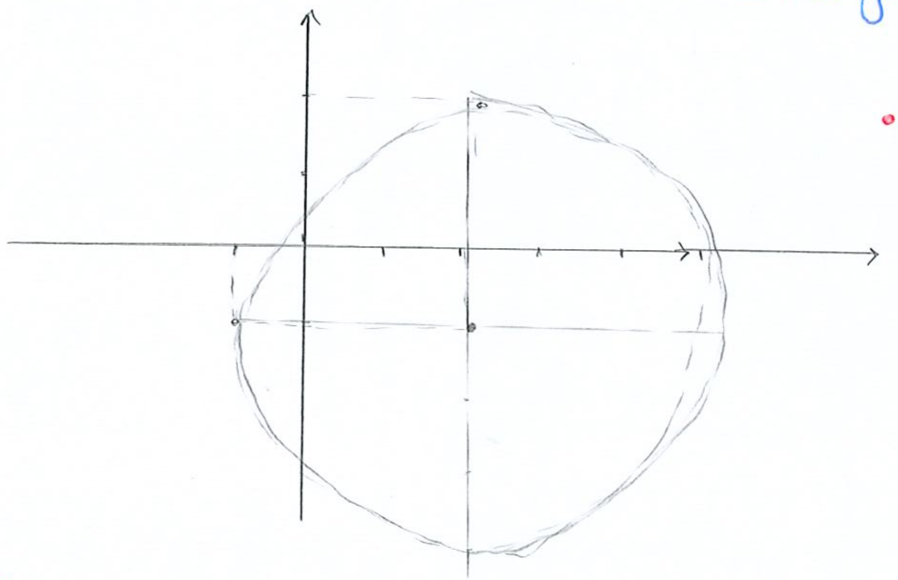
Geometrische Interpretation der Hauptachsenstransformation

Beispiele:

① $x^2+y^2-4x+2y-4=0$

$\rightsquigarrow (x-2)^2+(y+1)^2=9$

- durch quadratische Erägenzung
- Der Kreis mit Mittelpunkt $(2,-1)$ & Radius 3.



②

~~Auch~~

$4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$

Quddratische Ergänzung $\rightsquigarrow \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1.$

$\Rightarrow$ Eine Ellipse mit Mittelpunkt $(1,-2)$ und den Halbachsen $a=3, b=2$ handelt.

③

$$5x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 7y^2 - 16 = 0$$

Der Term $-2\sqrt{3}\,xy$?!

=> die zueinander senkrechten Hauptachsen in diesem Fall sind nicht parallel zu den Koordinatenachsen.

=> Geeignete Drehung des Koordinatensystems um den Nullpunkt.

$$\rightsquigarrow 5x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 7y^2 - 16 = (x \quad y)\begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 16$$

$$= \boxed{\vec{x}^T A \vec{x} - 16 = 0}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

I

$$= \lambda^2 - 12\lambda + 32 = \boxed{(\lambda - 8)(\lambda - 4) = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 4}$$

II Der normierte Eigenvektor zu $\lambda_1 = 8$

$$\begin{aligned} -3x - \sqrt{3}\,y &= 0 \\ -\sqrt{3}\,x - y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Der normierte E.v. zu $\lambda_2 = 4$

$$x - \sqrt{3}\,y = 0$$
$$-\sqrt{3}\,x + 3y = 0 \quad \Rightarrow \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

III Die Drehungsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$ & aus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ ergibt

sich $x = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\eta$

$y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\xi + \frac{1}{2}\eta$

! Beachte:
Wegen $\det(S) = 1$ ist die Transformation eine Drehung und zwar um den Winkel $\varphi = 60°$.

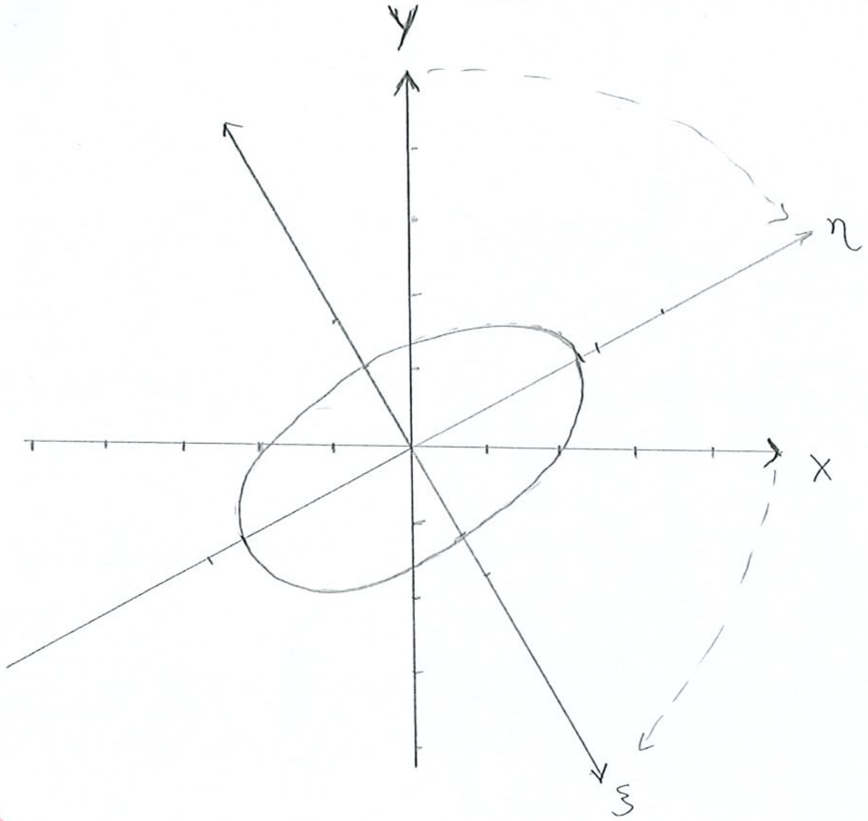
IV Ellipse mit den Halbachsen $a = \sqrt{2}, b = 2$.

$$8\xi^2 + 4\eta^2 = 16 \longrightarrow \frac{\xi^2}{2} + \frac{\eta^2}{4} = 1$$

! Keine quadratische Ergänzung nötig.

- Die Scheitel sind in ξ-η-Koordinaten: $(\pm\sqrt{2}, 0)_{\xi\eta}$, $(0, \pm 2)_{\xi\eta}$
- Die x-y-Koordinaten der Scheitel sind

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), (\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1)$$



4

$$3x^2-6xy-5y^2+\frac{48}{\sqrt{10}}x+\frac{64}{\sqrt{10}}y-19=0$$

I

$$A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & -5\end{pmatrix}$$

II

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -3\\ -3 & -5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda-24=0$$

$$\rightarrow \lambda_1=-6,\ \lambda_2=4$$

III

$$\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

IV

$$S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\rightarrow \begin{aligned}x&=\frac{1}{\sqrt{10}}\xi+\frac{-3}{\sqrt{10}}\eta\\ y&=\frac{3}{\sqrt{10}}\xi+\frac{1}{\sqrt{10}}\eta\end{aligned}$$

V

$$-6\xi^2+4\eta^2+24\xi-8\eta-19=0$$

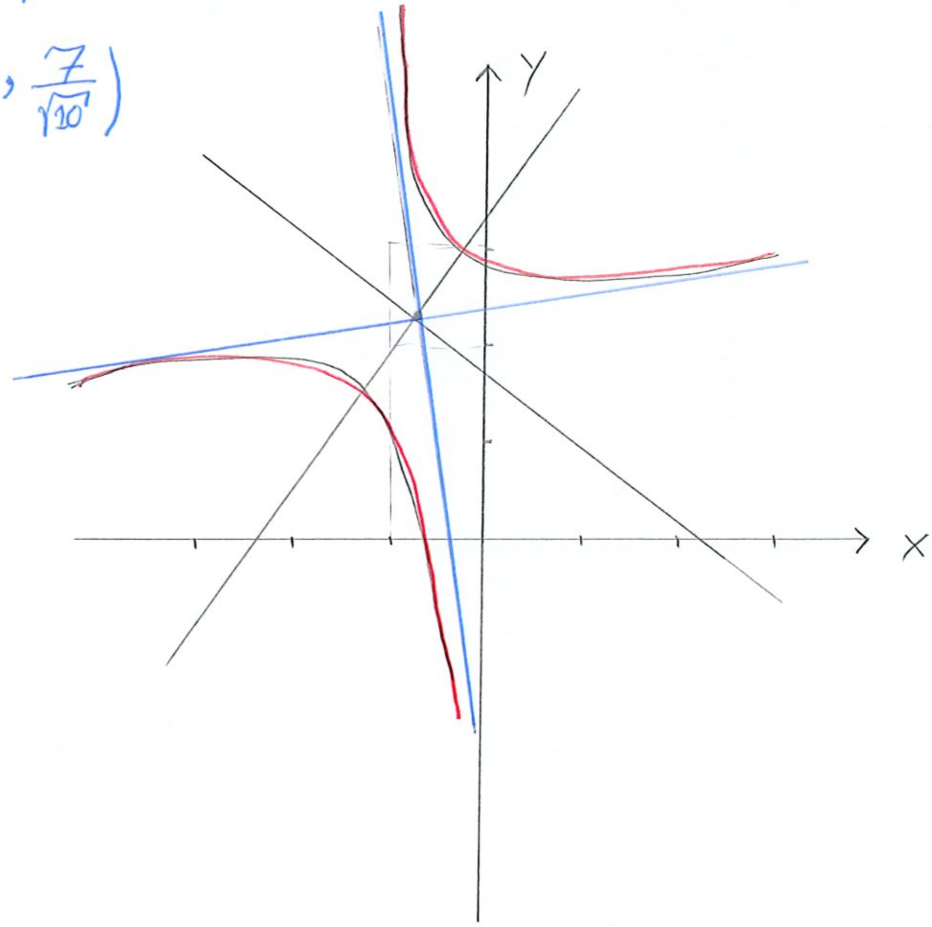
VI

$$6(\xi-2)^2-4(\eta-1)^2=1$$

$\Rightarrow$ Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt $(2,1)_{\xi\eta}$ und den Halbachsen $a=\frac{1}{\sqrt{6}}, b=1/2$

VII

Die x-y-Koordinaten des Mittelpunktes sind $\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{7}{\sqrt{10}}\right)$



$$x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - 4\sqrt{3}\,x - 4y + 24 = 0$$

$\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{E.W. } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 4$$

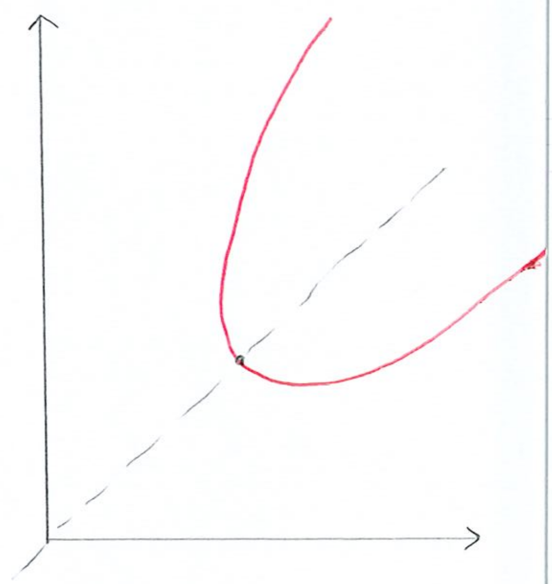
$$\rightsquigarrow S = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 4\eta^2 - 8\xi + 24 = 0 \rightarrow \xi = \tfrac{1}{2}\eta^2 + 3$$

- Der Kegelschnitt eine Parabel mit Scheitel $(3,0)_{\xi,\eta}$

Scheitel in x-y-Koordinaten $\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$.

S beschreibt eine Drehung um den Winkel 30°.



Hauptachsentransformation von Flächen:

1 Hyperboloid

$$-x^2+3y^2-z^2+6xz=1$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 3\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ 3 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-8)=0$$

$\lambda_1=3,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-4.$

$$\lambda_1=3 \Rightarrow \vec{e}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=2 \Rightarrow \vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow S=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

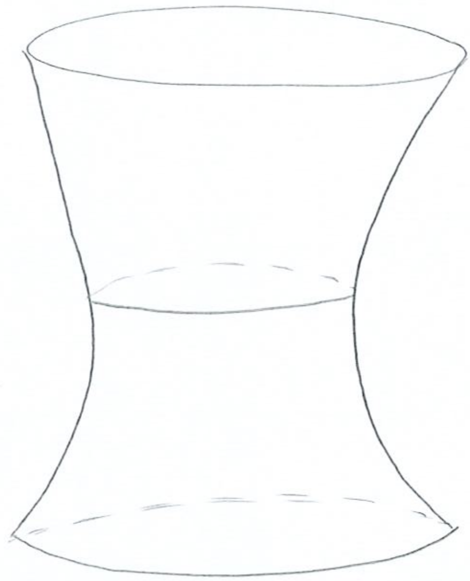
$$\lambda_3=-4 \Rightarrow \vec{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow x=\frac{1}{2}\eta+\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta \quad \rightsquigarrow 3\xi^2+2\eta^2-4\zeta^2=1$$

$$y=\xi$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}\eta-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta$$

$\rightsquigarrow$ Ein einschaliges Hyperboloid



(2) $x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 2z - 3 = 0$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \;,\; \lambda_3 = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\xi - \frac{1}{\sqrt{6}}\eta + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi - \frac{1}{6}\eta + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}}\eta + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta$$

$$\Rightarrow \; 2\xi^2 + 2\eta^2 - \zeta^2 + 2\sqrt{3}\,\zeta - 3 = 0$$

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{(\zeta - \sqrt{3})^2}{2} = 0$$

Ring:

1. Sei R ein Kommutativer Ring.

Für ein Element $t \in R$ betrachte man den Homo. $\Phi : R[T] \longrightarrow R$, $f \longmapsto f(t)$, der t anstelle der Variablen T einsetzt. Man zeige

$$\ker(\Phi) = R[T] \cdot (T - t)$$

(Hinweis: Man reduziere auf den Fall $t=0$, indem man Einsetzungshomomorphismus $R[T] \longrightarrow R[T]$ betrachtet, der T durch $T+t$ ersetzt.)

Lösung:

Gegeben ist ein Ring R & $t \in R$.

R-Algebrahomomorphismus $\Phi : R[T] \longrightarrow R$,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i T^i \longmapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i t^i.$$

$\phi_t := \phi(t)$

Nun für $t=0$,

$$\operatorname{Ker}(\Phi_0) = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i T^i ; a_0 = 0 \right\} = R[T] \cdot T$$

Sei nun $\Psi_t : R[T] \longrightarrow R[T]$

$$\cancel{\{T\}} \longmapsto \cancel{\{}T+t\cancel{\}}$$

$\Rightarrow \quad \Phi_0 \circ \Psi_t = \Phi_t .$

! Wir zeigen zunächst $\ker(\Phi_0) = R[T]\cdot T$, dass also $\ker \Phi_0$ mit dem von T in $R[T]$ erzeugten Hauptideal übereinstimmt.

$f \in R[T]\cdot T \Rightarrow f = g\cdot T$ wobei $g \in R[T]$.

$\Rightarrow \Phi_0(f) = \Phi_0(g\cdot T) = \Phi_0(g)\,\Phi_0(T) = 0$

$\Rightarrow f \in \ker(\Phi_0)$ wegen $\Phi_0(T) = 0$

Umgekehrt $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i T^i \in \ker(\Phi_0)$

$\Rightarrow a_0 = \Phi_0(f) = 0$ und damit

$$f = \sum_{i>0} a_i T^i = \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i+1} T^i\Big)\cdot T \in R[T]\cdot T$$

$\Rightarrow \ker(\Phi_0) = R[T]\cdot T$

$\Psi_t : R[T] \longrightarrow R[T]$ ist ein Isomorphismus, denn
$T \longmapsto T+t$

~~den~~ $\Psi_{-t} \circ \Psi_t : R[T] \longrightarrow R[T]$ als R-Algebrahomo. ist die Identität.

& $\Psi_t \circ \Psi_{-t} = id$

$\Rightarrow$ Nun $\Psi_t(\overbrace{R[T](T-t)}^{\text{Ideal}}) = R[T]\,T$

& $\Psi_{-t}(R[T]\,T) = R[T](T-t)$

$\Rightarrow$ Folglich schränkt sich der Isomorphismus Ψ_t zu einer Bijektion

$$R[T](T-t) \xrightarrow{\sim} R[T]\cdot T$$

ein, &

$$\Psi_t^{-1}(R[T]\cdot T) = R[T]\cdot(T-t)$$

$\rightsquigarrow$ $\Phi_t = \Phi_0 \circ \Psi_t$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker}(\Phi_t) = \Psi_t^{-1}(\ker \Phi_0) = \Psi_t^{-1}(R[T]T)$$

$$= R[T](T-t)$$

2 Es sei V ein nicht-trivialer Vektorraum über einem Körper K. Zu einem $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ betrachte man den Einsetzungshomomorphismus $\Phi : K[T] \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$, der φ anstelle von T einsetzt. Man bestimme $\ker \Phi$ in den Fällen $\varphi = \mathrm{id}$ und $\varphi = 0$. 12

Lösung:

$\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ & $V \neq 0$, $\Phi : K[T] \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$

Notation $\Phi_\varphi := \Phi(\varphi)$

Sei nun $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i T^i \in K[T]$

Für $\varphi = 0 \Rightarrow \Phi_0 = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i T^i ; a_0 \varphi^0 = 0 \right\}$

Beachte $\varphi^0 = \mathrm{id} \neq 0$, da V nicht-trivial ist

$$\Rightarrow \ker \Phi_0 = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i T^i \in K[T] ; a_0 = 0 \right\} = K[T].T$$

Wegen $\mathrm{id} \neq 0$

$$\ker \Phi_{\mathrm{id}} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i T^i \in K[T] ; \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = 0 \right\}$$

Beachte $T-1 \in \ker(\Phi_{id})$ & damit $K[T](T-1) \subset \ker \Phi_{id}$

Sei nun $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i T^i \in \ker \Phi_{id}$ und setzen eine Gleichung

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i T^i\right)\cdot(T-1) = -b_0 + \sum_{i>0} (b_{i-1} - b_i) T^i$$
$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i T^i$$

$\Rightarrow b_0 = -a_0$

$b_1 = b_0 - a_1$

$b_2 = b_1 - a_2 = -a_2 - a_1 - a_2$

Beachte $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = 0$ wegen $f \in \ker \Phi_{id}$.

$\Rightarrow b_i = 0$ für $i \geq \text{grad}(f)$

$\Rightarrow g = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i T^i \in K[T]$ mit $f = g\,(T-1)$

$\ker \Phi_{id} = K[T]\cdot(T-1)$

Verallgemeinerung:

Sei nun $c \in K$ & $c \cdot id : V \longrightarrow V$.

$$T - c \in \ker \Phi_{c \cdot id} \Rightarrow K[T] \cdot (T-c) \subset \ker \Phi_{c \cdot id}$$

$$\rightsquigarrow \quad K[T] = K + K[T] \cdot (T-c) \quad (\star)$$

Bemerkung:

Die Summe ist sogar direkt, da~~s~~ es in $K[T] \cdot (T-c)$ aus Gradsgründen keine nicht-trivialen konstanten Polynome ~~geg~~ geben kann.

Sei nun $f \in \ker \Phi_{c \cdot id}$ und $f = g \cdot (T-c) + a$ $(\star)$
wobei $g \in K[T]$ & $a \in K$

$$\Rightarrow a = \Phi_{c \cdot id}(g \cdot (T-c) + a) = \Phi_{c \cdot id}(f) = 0$$

$$\Rightarrow f \in K[T](T-c) \Rightarrow \ker \Phi_{c \cdot id} = K[T] \cdot (T-c)$$