

Aufgabe 1)

Sei R ein Ring. Für eine R -Algebra R' und R -Modul M betrachte man das Tensorprodukt $M \otimes_R R'$. Man zeige, dass dieses als R' -Modul, zusammen mit der R -linearen Abbildung $\tau: M \rightarrow M \otimes_R R'$, eindeutig durch folgende universelle Eigenschaft charakterisiert ist:

$$x \mapsto x \otimes 1$$

Zu jeder R -linearen Abbildung $\Phi: M \rightarrow E$ in einen R' -Modul E gibt es genau eine R' -lineare Abbildung $\varphi: M \otimes_R R' \rightarrow E$ mit $\Phi = \varphi \circ \tau$.

Lösung:

Sei $\Phi: M \rightarrow E$ eine R -lineare Abbildung in einen R' -Modul E .

Es ist lediglich zu zeigen, dass es zu Φ eine eindeutig bestimmte R' -lineare Abbildung $\varphi: M \otimes_R R' \rightarrow E$ gibt mit $x \otimes 1 \mapsto \Phi(x)$ für $x \in M$.

- Um die Existenz von φ einzusehen, betrachte man die R -bilineare Abbildung $M \times R' \rightarrow E$,
 $(x, a) \mapsto a \Phi(x)$
- Diese induziert gemäß der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts eine R -lineare Abbildung $\varphi: M \otimes_R R' \rightarrow E$, welche eindeutig durch $\varphi(x \otimes a) = a \Phi(x)$ für $a \in R'$ & $x \in M$ charakterisiert ist.

- Anhand dieser Eigenschaft sieht man sofort, dass φ als Abbildung zwischen R' -Modulen sogar R' linear ist.
- Ist umgekehrt $\psi: M \otimes_R R' \rightarrow E$ eine R' -lineare Abbildung mit $\psi(x \otimes 1) = \Phi(x)$ für $x \in M$, so stimmt ψ auf allen Tensoren der Form $x \otimes 1$ mit φ überein.
- Da diese Tensoren aber $M \otimes_R R'$ als R' -Modul erzeugen, folgt $\varphi = \psi$. □

Lemma:

Seien R' & R'' zwei R -Algebren.

Seien außerdem $\sigma': R' \rightarrow R' \otimes_R R''$ $a' \mapsto a' \otimes 1$

$\sigma'': R'' \rightarrow R' \otimes_R R''$ $a'' \mapsto a'' \otimes 1$

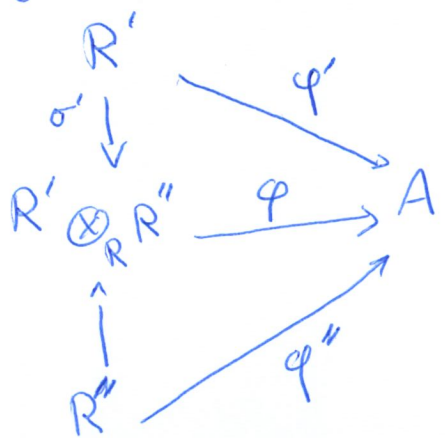
~~R-Algebren~~ R -Algebrahomomorphismen.

Die Abbildungen σ' & σ'' erfüllen folgende universelle Eigenschaft:

Zu je zwei R -Algebrahomomorphismen $\varphi': R' \rightarrow A$ & $\varphi'': R'' \rightarrow A$ in einer R -Algebra A gibt es genau einen

R -Algebrahomomorphismus $\varphi: R' \otimes_R R'' \rightarrow A$, so dass

das Diagramm



kommutiert.

Dabei ist φ charakterisiert durch $a' \otimes a'' \mapsto \varphi'(a') \cdot \varphi''(a'')$. ③

⊗ Besitzen φ', φ'' die gleiche universelle Eigenschaft wie σ', σ'' , so ist φ ein Isomorphismus.

Das Tensorprodukt $R' \otimes_R R''$ ist daher als R -Algebra durch die genannte universelle Eigenschaft eindeutig charakterisiert.

Aufgabe 2:

Man beweise die Existenz des Tensorprodukts $R' \otimes_R R''$ zweier R -Algebren in direkter Weise, indem man eine R -Algebra T konstruiert, die der universelle Eigenschaft aus Lemma ~~1~~ genügt.

Lösung:

Wir betrachten zunächst den Fall freier Polynomringe $R' = R[X]$ & $R'' = R[Y]$ mit s Systemen X & Y von Variablen.

⇒ Der Polynomring $R[X, Y]$ mit den kanonischen Injektionen $\sigma': R[X] \rightarrow R[X, Y]$ & $\sigma'': R[Y] \rightarrow R[X, Y]$ die universelle Eigenschaft aus dem Lemma erfüllt, d.h. ein R -Algebrahomomorphismus $R[X, Y] \rightarrow A$ ist nämlich eindeutig durch die Vorgabe der Bilder zu X & Y bestimmt.

Im Allgemeinfall lassen sich R' & R'' als

4

Restklassenringe freier Polynomringe darstellen, etwa

$$R' = R[X] / \mathfrak{a} \quad \& \quad R'' = R[Y] / \mathfrak{b}.$$

~~Exakte~~ $R[X, Y] / (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ erfülle zusammen mit den
kanonischen Abbildungen $\sigma': R[X] / \mathfrak{a} \rightarrow R[X, Y] / (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$
& $\sigma'': R[Y] / \mathfrak{b} \rightarrow R[X, Y] / (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ die universelle
Eigenschaft aus dem Lemma.

- Sind $\varphi': R[X] \rightarrow A$, $\varphi'': R[Y] \rightarrow A$ zwei R -
Algebrehomomorphismen mit $\mathfrak{a} \subset \ker(\varphi')$ & $\mathfrak{b} \subset \ker(\varphi'')$
so gilt für $\varphi: R[X, Y] \rightarrow A$ die Relation $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \subset \ker(\varphi)$.
□

Beispiel:

(5)

- Sei K ein Körper & V ein K -Modul, d.h. V ist ein K -VR. Dann V^* ist auch ein K -Modul.

~~Das Tensorprodukt~~ Das Tensorprodukt $V^* \otimes_F V$ ist kanonisch isomorph zu $V^* \otimes_R V \cong \text{End}_K(V)$.

Der Isomorphismus ist induziert durch die bilineare Abbildung $V^* \times V \longrightarrow \text{End}_K(V)$, wobei $\phi_{(\varphi, w)}(v) = \varphi(v) \cdot w$
 $(\varphi, w) \longmapsto \phi_{(\varphi, w)}$

- Falls V endlich dimensional ist (als K -VR) mit $n = \dim_K(V)$, dann die Wahl einer Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V induziert einen Isomorphismus $\text{End}_K(V) \cong M_{n \times n}(K)$ durch die Abbildung $a_i^j e^i \otimes e_j \longmapsto [a_i^j]$.

$$\Rightarrow V^* \otimes_K V \cong \text{End}_K(V) \cong M_{n \times n}(K)$$

Beispiel:

$$\text{Seien } v \in \mathbb{R}^n \text{ \& } w \in \mathbb{R}^m \Rightarrow v \otimes w = v w^t \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) \\ \& w \otimes v = w v^t \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Beispiel:

Seien $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, wobei ~~A & B~~ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\& B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ a_{21} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{22} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & a_{11} \cdot b_{12} & a_{12} \cdot b_{11} & a_{12} \cdot b_{12} \\ a_{11} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{22} & a_{12} \cdot b_{21} & a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} & a_{21} \cdot b_{12} & a_{22} \cdot b_{11} & a_{22} \cdot b_{12} \\ a_{21} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{22} & a_{22} \cdot b_{21} & a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Beispiel:

Seien $V = W = \mathbb{R}^3$. wir betrachten V & W als \mathbb{R} -VR mit der Standardbasis $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$. Dann

$$\{\hat{x} \otimes \hat{x}, \hat{x} \otimes \hat{y}, \hat{x} \otimes \hat{z}, \hat{y} \otimes \hat{x}, \hat{y} \otimes \hat{y}, \hat{y} \otimes \hat{z}, \hat{z} \otimes \hat{x}, \hat{z} \otimes \hat{y}, \hat{z} \otimes \hat{z}\}$$

ist eine Basis von $V \otimes W$.

Nun seien $v=(1,2,3)$ & $w=(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$, dann hat man

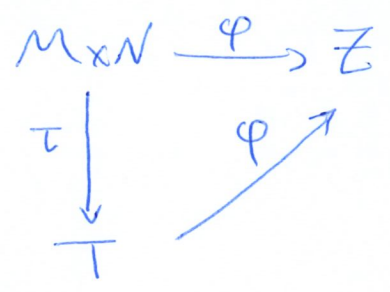
$$v \otimes w = \hat{x} \otimes \hat{x} + 2 \hat{y} \otimes \hat{x} + 3 \hat{z} \otimes \hat{x}.$$



Proposition:

Sei $\tau: M \times N \rightarrow T$ eine bilineare Abbildung von R -Moduln, mit $\text{im}(\tau) = T$. Dann τ ist das Tensorprodukt von M & N genau dann wenn:

Für alle R -Moduln Z , & alle bilineare Abbildungen $\varphi: M \times N \rightarrow Z$ existiert ein Homomorphismus $\tilde{\varphi}: T \rightarrow Z$, sodass das Diagramm



kommutiere.



Beispiel:

(8)

Sei M ein R -Modul. Laufe Definition der Moduln
use die Operation $\lambda: R \times M \rightarrow M$ bilinear.

Wir behaupten, dass λ ein Tensorprodukt von R &
 M über R ist & außerdem

$$R \otimes_R M \cong M.$$

Lösung:

$\text{im}(\lambda) = M$ & dann wenden wir die Proposition an.

Sei Z ein ~~beliebiger~~ beliebiger R -Modul & wir nehmen
an, dass die Abbildung $\varphi: R \times M \rightarrow Z$ bilinear ist.

Wir definieren $\tilde{\varphi}: M \rightarrow Z$ wobei $\tilde{\varphi}(m) := \varphi(1, m)$ for $m \in M$.

$\Rightarrow \tilde{\varphi}$ ist R -linear. Dann $\forall (r, m) \in R \times M$ gilt

$$\tilde{\varphi} \circ \lambda(r, m) = \tilde{\varphi}(rm) = \varphi(1, rm) = \varphi(r, m)$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} \circ \lambda = \varphi.$$