18.07.2022) Plenarübung)

Aufgabe 1)

Sei R ein Ring. Für eine R-Algebra R' und R-Modul M betrachte man das Tensorprodukt $M \otimes_R R'$. Man zeige, dass dieses als R'-Modul, zusammen mit der R-linearen Abbildung

$$\tau : M \longrightarrow M \otimes_R R', \quad x \longmapsto x \otimes 1$$

eindeutig durch folgende universelle Eigenschaft charakterisiert ist:

Zu jeder R-linearen Abbildung $\Phi : M \longrightarrow E$ in einen R'-Modul E gibt es genau eine R'-lineare Abbildung $\varphi : M \otimes_R R' \longrightarrow E$ mit $\Phi = \varphi \circ \tau$.

Lösung:

Sei $\Phi : M \longrightarrow E$ eine R-lineare Abbildung in einen R'-Modul E.

- Es ist lediglich zu zeigen, dass es zu Φ eine eindeutig bestimmte R'-lineare Abbildung $\varphi : M \otimes_R R' \longrightarrow E$ gibt mit $x \otimes 1 \longmapsto \Phi(x)$ für $x \in M$.

- Um die Existenz von φ einzusehen, betrachte man die R-bilineare Abbildung $M \times R' \longrightarrow E$, $(x, a) \longmapsto a\,\Phi(x)$

- Diese induziert gemäß der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes eine R-lineare Abbildung $\varphi : M \otimes_R R' \longrightarrow E$, welche eindeutig durch $\varphi(x \otimes a) = a\,\Phi(x)$ für $a \in R'$ & $x \in M$ charakterisiert ist.

- Anhand dieser Eigenschaft siehe man sofort, dass φ als Abbildung zwischen R'-Modulen sogar R' linear ist.

- Ist umgekehrt $\psi: M \otimes_R R' \longrightarrow E$ eine R'-lineare Abbildung mit $\psi(x \otimes 1) = \Phi(x)$ für $x \in M$, so stimmt ψ auf allen Tensoren der Form $x \otimes 1$ mit ~~[illegible]~~ φ überein.

- Da diese Tensoren aber $M \otimes_R R'$ als R'-Modul erzeugen, folgt $\varphi = \psi$. $\square$

~~Bsp~~ **Lemma:**

Seien R' & R'' zwei R-Algebren.

Seien außerdem
$$\sigma': R' \longrightarrow R' \otimes_R R'' \quad a' \longmapsto a' \otimes 1$$
$$\sigma'': R'' \longrightarrow R' \otimes R'' \quad a'' \longmapsto a'' \otimes 1$$
~~R-Algebren~~ R-Algebrahomomorphismen.

Die Abbildungen σ' & σ'' erfüllen folgende universelle Eigenschaft:
Zu je zwei R-Algebrahomomorphismen $\varphi': R' \to A$ & $\varphi'': R'' \to A$ in einer R-Algebra A gibt es genau einen R-Algebrahomomorphismus $\varphi: R' \otimes_R R'' \longrightarrow A$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
R' \arrow[d, "\sigma'"'] \arrow[dr, "\varphi'"] & \\
R' \otimes_R R'' \arrow[r, "\varphi"] & A \\
R'' \arrow[u] \arrow[ur, "\varphi''"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Dabei ist φ charakterisiert durch $a'\otimes a'' \mapsto \varphi'(a')\cdot\varphi''(a'')$. ③

Besitzen φ', φ'' die gleiche universelle Eigenschaft wie σ', σ'', so ist φ ein Isomorphismus.

Das Tensorprodukt $R'\otimes_R R''$ ist daher als R-Algebra durch die genannte universelle Eigenschaft eindeutig charakterisiert.

Aufgabe 2:

Man beweise die Existenz des Tensorprodukts $R'\otimes_R R''$ zweier R-Algebren in direkter Weise, indem man eine R-Algebra T konstruiere, die der universelle Eigenschaft aus Lemma genügt.

Lösung:

Wir betrachten zunächst den Fall freier Polynomringe $R' = R[X]$ & $R'' = R[Y]$ mit Systemen X & Y von Variablen.

$\Rightarrow$ Der Polynomring $R[X,Y]$ mit den kanonischen Injektion $\sigma' : R[X] \longrightarrow R[X,Y]$ & $\sigma'' : R[Y] \longrightarrow R[X,Y]$ die universelle Eigenschaft aus dem Lemma erfüllt, d.h ein R-Algebrahomomorphismus $R[X,Y] \longrightarrow A$ ist nämlich eindeutig durch die Vorgabe der Bilder zu X & Y bestimmt.

Im Allgemeinfall lassen sich R' & R'' ~~als~~ als Restklassenringe freier Polynomringe darstellen, etwa $R' = R[X]/\mathfrak{a}$ & $R'' = R[Y]/\mathfrak{b}$.

$\Rightarrow$ ~~Erfüllt~~ $R[X,Y]/(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ erfüllt zusammen mit den kanonischen Abbildungen $\sigma' : R[X]/\mathfrak{a} \longrightarrow R[X,Y]/(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ & $\sigma'' : R[Y]/\mathfrak{b} \longrightarrow R[X,Y]/(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ die universelle Eigenschaft aus dem Lemma.

- Sind $\varphi' : R[X] \longrightarrow A$, $\varphi'' : R[Y] \longrightarrow A$ zwei ~~R~~ R-Algebrenhomomorphismen mit $\mathfrak{a} \subset \ker(\varphi')$ & $\mathfrak{b} \subset \ker(\varphi'')$ so gilt für $\varphi : R[X,Y] \longrightarrow A$ die Relation $(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \subset \ker(\varphi)$.

$\square$

~~Bsp~~ **Beispiel:**

- Sei K ein Körper & V ein K-Modul, d.h. V ist ein K-VR. Dann V^* ist auch ein K-Modul.
  ~~Das Tensorprod~~ Das Tensorprodukt $V^* \otimes_F V$ ist kanonisch isomorph zu $V^* \otimes_R V \cong End_K(V)$.
  Der Isomorphismus ist induziert durch die Bilineare Abbildung
  $$\begin{aligned} V^* \times V &\longrightarrow End_K(V) \\ (\varphi, w) &\longmapsto \Phi_{(\varphi, w)} \end{aligned}$$
  , wobei $\Phi_{(\varphi,w)}(v) = \varphi(v) \cdot w$
- Falls V endlich dimensional ist (als K-VR) mit $n = \dim_K(V)$, dann die Wahl einer Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von V induziert einen Isomorphismus $End_K(V) \cong \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ durch die Abbildung $a_i^j e^i \otimes e_j \longmapsto [a^i_j]$.

$$\Rightarrow \boxed{V^* \otimes_K V \cong End_K(V) \cong \mathcal{M}_{n \times n}(K)}$$

Beispiel:

Seien $v \in \mathbb{R}^n$ & $w \in \mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ $v \otimes w = v w^t \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$
& $w \otimes v = w v^t \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$

~~Bsp~~ Beispiel:

Seien $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, wobei ~~$A \otimes B$~~ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

& $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ a_{21} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{22} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & a_{11} \cdot b_{12} & a_{12} \cdot b_{11} & a_{12}\, b_{12} \\ a_{11} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{22} & a_{12} \cdot b_{21} & a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} & a_{21}\, b_{12} & a_{22} \cdot b_{11} & a_{22} \cdot b_{12} \\ a_{21} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{22} & a_{22} \cdot b_{21} & a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

~~Beispl~~ Beispiel:

Seien $V = W = \mathbb{R}^3$. Wir betrachten V & W als $\mathbb{R}$-VR mit der Standard basis $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$. Dann

$$\{\hat{x}\otimes\hat{x}, \hat{x}\otimes\hat{y}, \hat{x}\otimes\hat{z}, \hat{y}\otimes\hat{x}, \hat{y}\otimes\hat{y}, \hat{y}\otimes\hat{z}, \hat{z}\otimes\hat{x}, \hat{z}\otimes\hat{y}, \hat{z}\otimes\hat{z}\}$$

ist eine Basis von $V \otimes W$.

Nun seien $v=(1,2,3)$ & $w=(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$, dann hat man

$$v \otimes w = \hat{x} \otimes \hat{x} + 2\, \hat{y} \otimes \hat{x} + 3\, \hat{z} \otimes \hat{x} .$$

Proposition:

Sei $\tau : M \times N \longrightarrow T$ eine bilineare Abbildung von R-Moduln, mit $\mathrm{im}(\tau) = T$. Dann τ ist das Tensorprodukt von M & N genau dann wenn:

Für alle R-Moduln Z, & alle bilineare Abbildungen $\varphi : M \times N \longrightarrow Z$ existiert einen Homomorphismus $\tilde{\varphi} : T \longrightarrow Z$, sodass das Diagram

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & Z \\ T \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiere.

Beispiel:

Sei M ein R-Modul. Laut Definition der Moduln ist die Operation $\lambda : R \times M \longrightarrow M$ bilinear.

Wir behaupten, dass λ ein Tensorprodukt von R & M über R ist & außerdem

$$R \otimes_R M \cong M.$$

Lösung:

$\operatorname{im}(\lambda) = M$ & dann wenden wir die Proposition an.

Sei Z ein ~~beliebiger~~ beliebiger R-Modul & wir nehmen an, dass die Abbildung $\varphi : R \times M \longrightarrow Z$ bilinear ist.

Wir definieren $\tilde{\varphi} : M \longrightarrow Z$ wobei $\tilde{\varphi}(m) := \varphi(1, m)$ for $m \in M$.

$\Longrightarrow$ $\tilde{\varphi}$ ist R-linear. Dann $\forall (r, m) \in R \times M$ gilt

$$\tilde{\varphi} \circ \lambda(r, m) = \tilde{\varphi}(rm) = \varphi(1, rm) = \varphi(r, m)$$

$\Longrightarrow \tilde{\varphi} \circ \lambda = \varphi.$