23.05.2022 ①

Sesquilinearformen & Matrizen:

Def.) Für eine Matrix $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$

~~heisse~~

$$\bar{A} = (\bar{\alpha}_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{m \times n} \quad \text{die konjugierte Matrix.}$$

$$A^t = (\alpha_{ij})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}} \in \mathbb{K}^{n \times m} \quad \text{die transpornierte Matrix.}$$

$$A^* = \bar{A}^t \quad \text{die adjungierte Matrix.}$$

Def.:

$\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ Sesquilinearform auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$.

$$:\Longleftrightarrow A_{\Phi,X} = \left(\Phi(x_i, x_j)\right)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

die zu Φ gehörige Matrix bezüglich der Basis X.

Satz:

- $$\Phi(a,b) = a_X^t \cdot A_{\Phi,X} \cdot \bar{b}_X$$
- die Matrix $A_{\Phi,X} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist durch diese Beziehung eindeutig betimmt.
- Φ nicht ausgeartet $\Longleftrightarrow \det(A_{\Phi,X}) \neq 0$

2

$$\{\text{Sesquilinearformen}\} \xrightarrow{\text{bij.}} \{(n\times n) \text{ Matritzen } \mathbb{K}^{n\times n}\}$$

$$\Phi \longmapsto A_{\Phi,X}$$

&

(i) $\Phi(a,b)=0$ für alle $b\in V$ impliziert $a=0$

$\Updownarrow$

(ii) $\Phi(a,b)=0$ für alle $a\in V$ impliziert $b=0$

$\Updownarrow$

(iii) Φ ist nicht ausgeartet.

$\Updownarrow$

(iv) $\det(A_{\Phi,X})\neq 0$.

Kor.:

(i) Φ ist eine sBF bzw. HF, d.h. für alle $a,b\in V$ gilt

$$\Phi(a,b) = \overline{\Phi(b,a)}$$

$\Updownarrow$

(ii) $A_{\Phi,X} = (A_{\Phi,X})^*$

Satz:

Sei $\Phi: V\times V \longrightarrow \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform auf einem endlichdim. $\mathbb{K}$-VR. V mit Basen X & Y. Dann gilt

$$A_{\Phi,Y} = A^t_{Y,X} \cdot A_{\Phi,X} \cdot \bar{A}_{Y,X}$$

Kor.:

(i) Φ ist ein Skalarprodukt, also eine positiv definite sBF bzw. HF.

$\Updownarrow$

(ii) Es existiere eine Matrix $S \in GL(n, \mathbb{K})$, so dass gilt

$$S^t \cdot A_{\Phi, X} \cdot \overline{S} = E$$

B Dabei ist $E \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix.

Kor.: Φ Skalarprodukt

$\Rightarrow \det(A_{\Phi, X}) > 0$ für alle Basen X von V.

Kor.:

Φ eine sBF bzw. HF &

$A_r = (\Phi(x_i, x_j))_{i,j=1,\dots,r} \in \mathbb{K}^{r \times r}, \quad r = 1, \dots, n$

(i) Φ ist positiv definit & damit ein Skalarprodukt

(ii) $\det(A_r) > 0$ für $r = 1, \dots, n$.

Kor.:

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ & $\Phi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$(a, b) \longmapsto a^t \cdot A \cdot \overline{b}$

(i) Φ ist ein Skalarprodukt

(ii) $A = A^*$ & alle Hauptunterdeterminante von

Aufgabe:

Es sei Φ eine sBF bzw. HF auf V und X eine Basis von V. Man zeige, dass alle Hauptunterdeterminanten von $A_{\Phi,X}$ reelle Zahlen ≥ 0 sind, falls Φ positive semi-definit ist. Gilt auch die Umkehrung?

Lösung:

(I) Spezialfall:

$V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Φ eine sBF auf V, e kanonische Basis von V.

$$A_{\Phi,e} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

, wobei wir $A_{\Phi,e} = (A_{\Phi,e})^t$ berücksichtigt haben.

Sei nun $a = (a_1, a_2)^t \in V$

$$\rightsquigarrow \Phi(a,a) = \alpha a_1^2 + 2\gamma a_1 a_2 + \beta a_2^2$$

Sei nun Φ positiv semi-definit, gelte also $\Phi(a,a) \geq 0$. $\forall a \in V$.

$a = (1,0)^t \Rightarrow \alpha \geq 0$ d.h die erste Hauptunterdeterminate von $A_{\Phi,e}$ ist ≥ 0.

Es gilt sogar $\alpha > 0$, denn

$A\ \alpha = 0 \Rightarrow \Phi(a,a) = 2\gamma a_1 + \beta$ und

für $2\gamma a_1 < \beta$ gilt $\Phi(a,a) < 0$ ↯

Analog $\beta > 0$.

Nun sei $a = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, -\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^t \in V$, und es

gilt $\Phi(a,a) = 2 - 2\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}} \geq 0$,

$\Rightarrow \gamma \leq \sqrt{\alpha\beta}$ bzw. $\gamma^2 \leq \alpha \cdot \beta$

$\Rightarrow \alpha \cdot \beta - \gamma^2 \geq 0$

⇝ die zweite Hauptunterdeterminante der Matrix $A_{\Phi,e}$ nicht-negativ ist. ▨

Zur Frage:

Φ positive semi definit $\Rightarrow \alpha > 0, \beta > 0$ & $\alpha\beta - \gamma^2 \geq 0$

Hauptunterdeterminante von $A_{\Phi,e}$ nicht-negativ $\Rightarrow \alpha \geq 0,\ \alpha\beta - \gamma^2 \geq 0$

⇝ Wir erwarten, dass Φ sBF nicht automatisch positiv semi-definit sein wird, wenn die Hauptunterdeterminanten einer zugehörigen Matrix nicht-negativ sind!

II Allg. Fall:

$X = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von V.

$\rightsquigarrow$ X_i eine Basis des von $x_1, \dots, x_i$ erzeugten UVR $V_i \subset V$.

Sei nun Φ positiv semi-definit &

$\Phi_i = \Phi|_{V_i}$ für $i = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow$ Φ_i positiv semi-definit.

Ist Φ_i positiv definit $\Rightarrow \det(A_{\Phi_i, X_i}) > 0$

Andernfalls $\exists\, x \in V_i - \{0\}$ mit $\Phi_i(x, x) = 0$ & Φ_i ist ausgeartet. (Φ ist genau dann positiv-definit, wenn Φ nicht ausgeartet ist.)

$\Rightarrow \det(A_{\Phi_i}, X_i) = 0$.

$\rightsquigarrow$ In beiden Fällen $\det(A_{\Phi_i}, X_i) \geq 0$

$\Rightarrow$ & Da $\det(A_{\Phi_i}, X_i)$ gerade die i-te Hauptunterdeterminante von $A_{\Phi, X}$ ist, folgt die Aussage.

Aufgabe:

Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zeige man:

Durch $\langle a,b\rangle = a^t . A . \bar{b}$ wird genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ definiert, wenn es eine Matrix $S \in Gl(n,\mathbb{K})$ mit $A = S^t . \bar{S}$ gibt.

Lösung:

Sei Φ die zugehörige Bilinearform auf $\mathbb{K}^n$.

$\Rightarrow A = S^t . E . \bar{S}$ $\quad E \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Einheitmatrix.

Sei $A = A_{\Phi,e}$, wobei e ist die kanonische Basis von $\mathbb{K}^n$.

„$\Rightarrow$“ ~~Angenommen~~ Φ definiere ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ $\Rightarrow$ Es gibt eine Orthonormalbasis X zu Φ, und es gilt

$$A = A_{\Phi,e} = A^t_{e,X} . A_{\Phi,X} . \bar{A}_{e,X} = A^t_{e,X} . \bar{A}_{e,X} .$$

Beachte: X orthonormal $\Rightarrow A_{\Phi,X}$ die Einheitmatrix.

$\Rightarrow S = A_{eX}$

8

„$\Leftarrow$" Gilt umgekehrt $A = S^t . \bar{S}$ mit $S \in GL(n, \mathbb{K})$

$\Rightarrow$ S kann als Basiswechselmatrix $A_{e,Y}$ interpretiert werden, d.h. $A = A^t_{e,Y} \cdot \bar{A}_{e,Y}$.

Dann

$$A_{\Phi,Y} = A^t_{Y,e} \cdot A_{\Phi,e} \cdot \bar{A}_{Y,e} = A^t_{Y,e} . A . \bar{A}_{Y,e}$$

$$= (A_{e,Y} \cdot A_{Y,e})^t \overline{(A_{e,Y} \cdot A_{Y,e})} = E,$$

d.h. Y ist eine Orthonormalbasis zu Φ.

Nun seien $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $a = \sum_i \alpha_i y_i$ &

$b = \sum_i \beta_i y_i$ mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow \Phi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha_i} \beta_i}$$

$$= \overline{\Phi(b,a)}$$

& $\Phi(a,a) = \sum_i \alpha_i \bar{\alpha_i} = \sum_i |\alpha_i|^2 > 0$ für $a \neq 0$.

$\Rightarrow$ Φ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ erklärt.

Die adjungierte Abb.:

$(\mathbb{K}, \sigma)$ Körper mit σ.

V end.-dim. $\mathbb{K}$-VR mit nicht ausgearteter Sesq.bi. Φ, $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$

Nun sei V^σ der $\mathbb{K}$-VR mit derselben additive abl. Gruppe ~~und~~ aber die folgende skalare Multiplikation

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times V^\sigma &\longrightarrow V^\sigma \\ (\alpha, v) &\longmapsto \alpha \bullet v := \sigma(\alpha) \cdot v \end{aligned}$$

Es gilt

1. (i) $(V^\sigma)^\sigma = V$
2. (ii) $\dim_k(V^\sigma) = \dim_k(V)$
3. (iii) Falls $\sigma = id_K$, dann $V = V^\sigma$
4. (iv) $\mathrm{End}_K(V^\sigma) = \mathrm{End}(V)$

Lemma:

$$\begin{aligned} \tau : V^\sigma &\longrightarrow V' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) \\ x &\longmapsto \Phi(\cdot, x) \end{aligned}$$

ist ein Iso. von $\mathbb{K}$-VR.

Satz:

~~Sei $\Phi: V \times V \to \mathbb{K}$~~

$\exists!\ \varphi^* \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ mit

$$\Phi(\varphi(x), y) = \Phi(x, \varphi^*(y)) \quad \forall x, y \in V.$$

~~Man~~ φ^* adj. zu φ.

Bemerkung:

X Orthonormalbasis von V.
Für $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und die zugehörige adj. Abb. φ^* gilt dann

$$A_{\varphi^*, X, X} = (A_{\varphi, X, X})^*$$

Def.:

$$\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi \iff: \varphi \text{ ist normal.}$$

Satz:

φ normal $\iff \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle \varphi^*(x), \varphi^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in V.$

Kor.:

Sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ normal.

$\Rightarrow$ (i) $\ker(\varphi) = \ker(\varphi^*)$

(ii) $x \in V$ EV. von ~~zu~~ φ zum EW. λ

$\iff$

x EV. von φ^* zum EW. $\overline{\lambda}$.

11

Satz) $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$, $\chi_\varphi \in \mathbb{K}[T]$ charak. Poly.

χ_φ zerfällt in Lin.faktoren vollständig.

(i) φ normal

$\Updownarrow$

(ii) $\exists$ EV'en bezüglich φ, die eine Orthonormalbasis von V bilden.

Aufgabe:

Man zeige $\mathrm{Spur}(\varphi, \varphi^*) \geq 0$, wobei

$\mathrm{Spur}(\varphi, \varphi^*)$ genau für $\varphi = 0$ verschwindet

Lösung:

- Die Spur eines Endomorphismus $f: V \longrightarrow V$ ist gegeben durch die Spur einer beschreibenden Matrix A_{f,X,X_f} zu einer beliebigen Basis X von V.

Sei X Orthonormalbasis von V.

dann

$$\rightsquigarrow A_{\varphi^*,X,X} = (A_{\varphi,X,X})^*$$

Spur bilden

$$\rightsquigarrow \mathrm{Spur}\left(A_{\varphi,X,X} \cdot (A_{\varphi,X,X})^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot \overline{\alpha_{ij}} = \sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2 \geq 0$$

$\mathrm{Spur}(A_{\varphi,X,X} \cdot (A_{\varphi,X,X})^*) = 0 \iff \alpha_{ij} = 0$
$\forall i,j$
$\Updownarrow$
$\varphi = 0.$

Aufgabe)

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

φ ist normal $\iff \exists p \in \mathbb{C}[T]$ mit $\varphi^* = p(\varphi)$.

Lösung:

"$\Leftarrow$" $\exists p \in \mathbb{C}[T]$ mit $\varphi^* = p(\varphi)$
$\Rightarrow \varphi \circ \varphi^* = \varphi \circ p(\varphi) = p(\varphi) \circ \varphi = \varphi^* \circ \varphi$
$\Rightarrow \varphi$ ist normal.

"$\Rightarrow$"

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \chi_\varphi$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren.

φ normal $\Rightarrow \exists X$ orthonormalbasis von V, die ~~aus~~ sämtlich aus EV'en zu φ bestehe & damit auch aus EV'en zu φ^*

d.h.

$$A_{\varphi, X, X} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \ \Delta$$

$$A_{\varphi^*, X, X} = (A_{\varphi, X, X})^* = \mathrm{Diag}(\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n)$$

$\Rightarrow$ Es ist ein Polynom $p \in \mathbb{C}[T]$ zu finden, welches der Beziehung

$$\mathrm{Diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)) = p(A_{\varphi, X, X}) = A_{\varphi^*, X, X} = \mathrm{Diag}(\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n)$$

genügt.

Sei nun $p_i = c_i \cdot \prod_{\substack{j = 1, \dots, r \\ i \neq j}} (T - \lambda_j)$, $c_i \in \mathbb{C}$,

sodass $p_i(\lambda_i) = \overline{\lambda}_i$

Dann ist $p = \sum_i p_i$ ein Polynom in $\mathbb{C}[T]$,

das an den Stellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Werte $\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n$ annimmt.

$\Rightarrow \varphi^* = p(\varphi)$ $\boxtimes$