(30,50,22)

rübung:

be 1)

Man zeige für Drehmatrizen $R(\vartheta_1), R(\vartheta_2) \in$ mit Winkeln $0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 < 2\pi$, dass diese genau dann ähnlich sind, wenn $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 2\pi$ gilt.

Lösung:

Gelte zunächst $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 2\pi$. Da der Fall $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pi$ ausgeschlossen ist, können wir etwa $\vartheta_1 < \pi$ und somit $\pi < \vartheta_2 < 2\pi$ annehmen.

Definieren wir

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto R(\vartheta_1) \cdot x = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 & -\sin\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Dann erhalten wir $A_{f,e,e} = R(\vartheta_1)$ als beschreibende Matrix bezüglich der kanonischen Basis $e = (e_1, e_2)$ von $\mathbb{R}^2$.

Dann gilt für $e' = (e_2, e_1)$ von $\mathbb{R}^2$ offenbar

$$A_{f,e',e'} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 \\ -\sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_2 & -\sin\vartheta_2 \\ \sin\vartheta_2 & \cos\vartheta_2 \end{pmatrix}$$

wobei $\vartheta_2 = 2\pi - \vartheta_1$ & $\cos(-\vartheta_1) = \cos(\vartheta_1)$, $\sin(-\vartheta_1) = -\sin(\vartheta_1)$

Def.:
Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in Gl(n, K)$ mit $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$ gibt.

$\Rightarrow R(\vartheta_1)$ & $R(\vartheta_2)$ ähnlich sind.

- ~~Bei~~ Seien nun umgekehrt $R(\vartheta_1)$ & $R(\vartheta_2)$ als ähnlich vorausgesetzt. Dann

Def.:
Sei $A = (\alpha_{ij})_{ij} \in K^{n \times n}$. Dann heißt

$$\chi_A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(T \delta_{\pi(i), i} - \alpha_{\pi(i), i} \right) \in K[T]$$

Insbesondere gilt $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ für alle $\lambda \in K$, und die Nullstellen von χ_A in K sind gerade die EW. von A

$\Rightarrow \chi(R(\vartheta_1)) = \chi(R(\vartheta_2))$,

denn $(T - e^{i\vartheta_1})(T - e^{-i\vartheta_1}) = \chi(R(\vartheta_1))$

$(T - e^{i\vartheta_2})(T - e^{-i\vartheta_2}) = \chi(R(\vartheta_2))$

③ Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung:

$$e^{i\vartheta_1} = e^{\pm i\vartheta_2}.$$

Wir wissen, dass $0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 < 2\pi$.

Dann we have

$\vartheta_1 = \vartheta_2$ ausgeschlossen

oder $\vartheta_1 = 2\pi - \vartheta_2$ $\boxtimes$

Kor 6.)

Ähnliche Matrizen besitzen die gleiche Spur.

Alternative können wir auch benutzen, dass ähnliche Matrizen die gleiche Spur besitzen.

Dann wir haben

$$\cos(\vartheta_1) = \cos(\vartheta_2) \Rightarrow \vartheta_1 + \vartheta_2 = 2\pi.$$

Aufabe:

Es sei $A=(\alpha_{ij}) \in O(n)$ eine orthogonale in unterer Dreiecksgestalt, d.h. es gelte $\alpha_{ij}=0$ für $i<j$. Man zeige, dass A sogar eine Diagonalmatrix ist. Gilt eine entsprechende Aussage auch für Matritzen $A \in U(n)$?

Lösung:

Für $n=1$ trivial.

Für $n=2$

Satz:

Es bestehe $SO(2)$ aus allen reellen (2×2)-Matrizen, die zu Drehungen um den Nullpunkt im $\mathbb{R}^2$ Anlass geben, also

$$SO(2)=\{R(\vartheta);\, 0<\vartheta<2\pi\}.$$

Abgesehen von den trivialen Fällen $R(0)=id$, $R(\pi)=-id$ besitzen die Matrizen $R(\vartheta)$ keine reellen EW. und sind folglich auch nicht diagonalisierbar

$\Rightarrow$ Jede untere Dreieckmatrix in $O(2)$ bereits eine Diagonalmatrix ist.

Sei nun $A = (\alpha_{ij}) \in O(n)$ für allgemeines n. 5

$\Rightarrow A^t = A^{-1}$, $\rightsquigarrow A \cdot A^t = E \xrightarrow{n}$ Einheitsmatrix.

Dies bedeutet:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \cdots & \alpha_{n1} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

D.h.:

$|\alpha_{11}|^2 = 1$, $\alpha_{11} \cdot \alpha_{i1} = 0$, $|\alpha_{22}|^2 = 1$, $\alpha_{22} \cdot \alpha_{i2} = 0$

$\Downarrow$ $\alpha_{11} \neq 0$

$\Downarrow$ $\alpha_{i1} = 0$ für $i = 2, \ldots, n$

$\Downarrow$ $\alpha_{22} \neq 0$

$\Downarrow$ $\alpha_{i2} = 0$ für $i = 3, \ldots, n$.

$\Rightarrow A$ ist eine Diagonalmatrix.

- Eine entsprechende Rechnung funktioniert auch für unitär Matrizen $A \in U(n)$. Es ist dann lediglich A^t durch die adjungierte Matrix A^* zu ersetzen.

Alternative:

Sei nun $V = \mathbb{R}^n$ als euklidischen Vektorraum unter dem kanonischen Skalarprodukt, wobei die kanonische Basis $e = (e_1, \dots, e_n)$ eine Orthonormalbasis bildet.

Sei $A \in O(n)$ mit den Spalten $a_1, \dots, a_n \in V$, also

$$A = (a_1, \dots, a_n).$$

- Beachte $A \cdot A^t = E \Rightarrow (a_1, \dots, a_n)$ ebenfalls Orthonormalbasis von V.

- Angenommen: A besitzt untere Dreiecksgestalt

$\Rightarrow a_i = \langle e_i, \dots, e_n \rangle$ für $\nu = 1, \dots, n$.

- Wir wollen mit Induktion nach n zeigen, dass $\langle a_i \rangle = \langle e_n \rangle$ für $i=1,\dots,n$ folgt. 7

- Zuerst gilt natürlich $\langle a_n \rangle = \langle e_n \rangle$. $n=1$ ✓

Weiter folgt

$$a_1,\dots,a_{n-1} \in \langle a_n \rangle^{\perp} = \langle e_n \rangle^{\perp} = \langle e_1,\dots,e_{n-1} \rangle$$

$$\Rightarrow a_i \in \langle e_i,\dots,e_n \rangle \cap \langle e_1,\dots,e_{n-1} \rangle = \langle e_i,\dots,e_{n-1} \rangle, \quad i=1,\dots,n-1$$

Die Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow \langle a_i \rangle = \langle e_i \rangle$ für $i=1,\dots,n-1$

$\Rightarrow A=(a_1,\dots,a_n)$ eine Diagonalmatrix.

Unitäre Matrizen:

$V=\mathbb{C}^n$ ~~als~~ unitärer VR. unter dem kanonischen Skalarprodukt, mit der kanonischen Basis $e=(e_1,\dots,e_n)$ als Orthonormalbasis.

$A \cdot A^* = E$ für $A \in \mathcal{U}(n)$

$\Rightarrow$ bilden die Spalten von A eine weitere Orthonormalbasis von V.

Analog $\Rightarrow$ A ist eine Diagonalmatrix, wenn A untere Dreiecksgestalt besitzt.

Frage: $SO(n)$, $O(n)$, $U(n)$?

Antwort:

Die Mengen ~~SO~~ $SO(n)$, $O(n)$ & $U(n)$ sind Untergruppen von $GL(n, \mathbb{R})$ bzw. $GL(n, \mathbb{C})$, definiere

$$O(n) := \{ A \in GL(n; \mathbb{R}) : A^{-1} = A^T \}$$

$$SO(n) := \{ A \in O(n) : \det(A) = 1 \}$$

$$U(n) := \{ A \in GL(n; \mathbb{C}) ; A^{-1} = \overline{A^T} \}$$

Untergruppe:

z.B.: $A, B \in U(n)$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} = \bar{B}^T \cdot \bar{A}^T = (\overline{AB})^T \ \& \ (A^{-1})^{-1} = A = (\overline{\bar{A}^T})^T$$

Frage:

Zeigen Sie, dass ein Endomorphism $F: V \longrightarrow V$ eines euklidischen bzw. unitären Vektorraumes V genau dann orthogonal bzw. Unitär ist, wenn F Orthonormalbasen ~~auf~~ von V auf Orthonormalbasen V abbildet.

$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Orthonormalbasen von V

F orthogonal bzw. unitär, dann gilt

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \;\&\; \langle F(v_i), F(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

$\Rightarrow \{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ ebenfalls eine Orthonormalbasis von V ist.

Umgekehrt:

$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ & $C = \{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}$ Orthonormalbasen von V & $F \in End(V)$.

Dann für $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$

$$w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$$

$$\Rightarrow F(v) = \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_n F(v_n)$$

$$F(v) = \mu_1 F(v_1) + \cdots + \mu_n F(v_n)$$

B & C orthonormal

$$\Rightarrow \langle v, w \rangle = \lambda_1 \bar{\mu}_1 + \cdots + \lambda_n \bar{\mu}_n$$

$$\langle F(v), F(w) \rangle = \lambda_1 \bar{\mu}_1 + \cdots + \lambda_n \bar{\mu}_n$$

$\Rightarrow F$ ist unitär!

bzw. Orthogonal

Frage: Klassifizierung der orthogonalen Matrizen (10)

Antwort:

$F \in End(V)$, B Orthonormalbasis, sodass

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} +1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & A_1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

wobei $A_j = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix} \in SO(2)$

mit $\theta_j \in [0, 2\pi) \setminus \{0, \pi\}$

Beweis

Induktion $n = 1, 2$ ✓