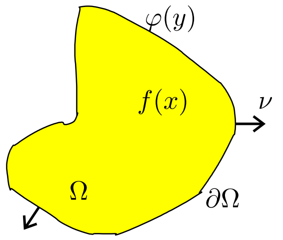
1 Die Laplace-Poisson-Gleichung

1.1 Einleitung

$\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, glatter Rand $\partial\Omega$

Randwertaufgaben



$\nu \ldots$ äußere Normale

seien $A = -\Delta$ Laplace[1]-Operator, f gegeben, suchen u mit

$Au(x) = -\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega$ *Laplace-Poisson[2]-Gleichung*

Randbedingungen: $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ gegeben

$u(y) = \varphi(y), \quad y \in \partial\Omega,$ Dirichlet[3]-*Bedingung*

$\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) = \varphi(y), \quad y \in \partial\Omega,$ Neumann[4]-*Bedingung*

Bemerkung : $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_j$

Beispiel : Stationäre Wärmeverteilung

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\varphi(y)$, $y \in \partial\Omega$ gegeben, Anfangstemperatur $w(x)$, $x \in \Omega$, *gesucht:* Temperatur $u(x,t)$, mit

$$\begin{aligned} \Delta u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= 0, & x \in \Omega,\ t \geq 0 \\ u(x,0) &= w(x), & x \in \Omega \\ u(y,t) &= \varphi(y), & y \in \partial\Omega,\ t \geq 0 \end{aligned}$$

stationäre Verteilung, d.h. $u(x,t)$ für $t \to \infty$?

heuristisch: $u(x) := \lim_{t\to\infty} u(x,t) \dashrightarrow \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad u(y) = \varphi(y), \quad y \in \partial\Omega$

Dirichlet'sches Maximum-Prinzip $\quad \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{y\in\partial\Omega} u(y)$

Integralsätze

- *Satz von Gauß*[5]

  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, zulässiges Gebiet, $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \ldots, F_n)$, $F_k \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$, $k = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} F_k(\sigma)\nu_j(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \quad j,k = 1,\ldots,n, \\ \int_\Omega \mathrm{div} F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} \langle F(\sigma), \nu(\sigma)\rangle\,\mathrm{d}\sigma \end{aligned} \tag{1}$$

- *Sätze von Green*[6] */ Green'sche Formeln*

  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, zulässiges Gebiet, $f, g \in \mathrm{C}^2(\Omega)$, $h \in \mathrm{C}^1(\Omega)$, ν äußere Normale an $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} \int_\Omega h(x)(\Delta f)(x)\,\mathrm{d}x &= -\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} h(\sigma) \frac{\partial f}{\partial \nu}(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \\ \int_\Omega [f\ \Delta g - g\ \Delta f]\ \mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} \left[f\ \frac{\partial g}{\partial \nu} - g\ \frac{\partial f}{\partial \nu} \right] \mathrm{d}\sigma \end{aligned} \tag{2}$$

---

[1] Pierre Simon Laplace (* 23.1.1749 Beaumont-en-Auge, Normandie † 5.3.1827 Paris)
[2] Siméon Denis Poisson (* 21.6.1781 Pithiviers/Frankreich † 25.4.1840 Sceaux/Frankreich)
[3] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (* 13.2.1805 Düren † 5.5.1859 Göttingen)
[4] Carl Gottfried Neumann (* 7.5.1832 Königsberg † 27.3.1925 Leipzig)
[5] Carl Friedrich Gauß (* 30.4.1777 Brunswick † 23.2.1855 Göttingen)
[6] George Green (* July 1793 Nottingham † 31.5.1841 Nottingham)

Schwache Lösungen

Dirichlet-Problem für Poisson-Gleichung, homogene Randbedingungen : *gegeben* $f \in \mathsf{C}(\Omega)$, *suchen* (punktweise) Lösung $u \in \mathsf{C}^2(\Omega) \cap \mathsf{C}(\overline{\Omega})$ mit

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(y) = 0 \quad , & y \in \partial\Omega \end{array} \right\} \implies -\int_\Omega \Delta u(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\, \psi \in \mathsf{C}^1(\Omega),\ \psi|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright \int_\Omega f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_\Omega \Delta u(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \\ &\underset{\text{Green (2)}}{=} \int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \overbrace{\psi(\sigma)}^{0} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma}_{0} \\ &= \int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, \psi \in \mathsf{C}^1(\Omega),\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

sei $u|_{\partial\Omega} = 0$ mit (3) $\curvearrowright$ u „schwache" Lösung des Randwertproblems; f gegeben $\dashrightarrow$ betrachten $\int_\Omega f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x$ als lineares Funktional auf $\left\{\psi \in \mathsf{C}^1(\Omega) \ : \psi|_{\partial\Omega} = 0\right\}$ $\curvearrowright$ dafür nur noch $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (statt $f \in \mathsf{C}(\Omega)$) notwendig $\rightsquigarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ Distributionen, z.B. $f \in L_p(\Omega)$ $\dashrightarrow$ $\Delta u \in L_p(\Omega)$ $\dashrightarrow$ Sobolev-Räume, ...

zunächst: Präzisierung der betrachteten Klasse von Differentialoperatoren und Gebieten

Definition 1.1 *Seien* $a_{jk}(x) = a_{kj}(x) \in \mathsf{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ *reellwertig,* $j,k = 1,\dots,n$, $b_l(x)$, $c(x) \in \mathsf{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ *komplexwertig,* $l = 1,\dots,n$, *dann heißt der Differentialoperator zweiter Ordnung*

$$Au := -\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{l=1}^n b_l(x)\frac{\partial u}{\partial x_l} + c(x)u$$

elliptisch in Ω, *falls es ein* $C > 0$ *gibt, so dass für alle* $x \in \overline{\Omega}$ *und* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *die* Elliptizitätsbedingung

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \ \geq\ C\,|\xi|^2 \tag{4}$$

erfüllt ist.

Beispiel : *Laplace-Operator* : $-\Delta = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \dashrightarrow a_{jk}(x) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} 1\,, & j=k \\ 0\,, & \text{sonst} \end{array} \right\}$, $b_l \equiv 0$, $c \equiv 0$

$$\implies \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)\xi_j\xi_k = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 = |\xi|^2 \dashrightarrow C := 1 \implies -\Delta \ \text{elliptisch in (beliebigem)}\ \Omega$$

Schreibweise : $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\mathrm{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

Bemerkung : • *allgemeiner* : $a_\alpha : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar, stetig, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $0 \le |\alpha| \le 2$, dann ist

$$A \;=\; -\sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x) \mathrm{D}^\alpha$$

(*gleichmäßig*) *elliptisch in* Ω, falls es ein $C > 0$ gibt, so dass

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \xi^\alpha \;\ge\; C\,|\xi|^2 \qquad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$|\alpha| = 2 \dashrightarrow\; a_\alpha(x) =: a_{jk}(x) = a_{kj}(x),\; 1 \le j,k \le n$, mit $\alpha_j, \alpha_k \ne 0 \quad \curvearrowright$

$$A = -\sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha = -\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \;+\; \sum_{l=1}^n b_l(x) \frac{\partial}{\partial x_l} + c(x)$$

- $\displaystyle\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha$ ... quadratische Form
- $\exists\, C > 0\; \forall\, x \in \overline{\Omega},\; \xi \in \mathbb{R}^n\; : \displaystyle\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \xi^\alpha \;\le\; -C\,|\xi|^2 \;\curvearrowright\; \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x) \mathrm{D}^\alpha$ elliptisch

<u>*komplexe / reelle Bedingung:*</u> sei $\xi \in \mathbb{C}^n \quad\Longleftrightarrow\quad \xi = (\Re\mathrm{e}\,\xi_1 + i\,\Im\mathrm{m}\;\xi_1, \ldots, \Re\mathrm{e}\,\xi_n + i\,\Im\mathrm{m}\;\xi_n)$

Ansatz :

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \xi_j \overline{\xi_k} \;\ge\; C\,|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{C}^n \tag{5}$$

sinnvoll: $\overline{\displaystyle\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \xi_j \overline{\xi_k}} = \displaystyle\sum_{j,k=1}^n \underbrace{\overline{a_{jk}}(x)}_{=a_{jk}(x)=a_{kj}(x)\in\mathbb{R}} \overline{\xi_j} \xi_k \;=\; \sum_{k,j=1}^n a_{kj}(x) \xi_k \overline{\xi_j} \in \mathbb{R}$; *klar* : (5) $\underset{\xi\,\in\,\mathbb{R}^n}{\Longrightarrow}$ (4) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ (5):

$$\curvearrowright \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \underbrace{(\Re\mathrm{e}\,\xi_j + i\,\Im\mathrm{m}\;\xi_j)}_{\xi_j} \underbrace{(\Re\mathrm{e}\,\xi_k - i\,\Im\mathrm{m}\;\xi_k)}_{\overline{\xi_k}} \;=\; \underbrace{\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \left(\Re\mathrm{e}\,\xi_j\; \Re\mathrm{e}\;\xi_k + \Im\mathrm{m}\,\xi_j\; \Im\mathrm{m}\;\xi_k\right)}_{\Re\mathrm{e}\left(\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)(\Re\mathrm{e}\,\xi_j + i\Im\mathrm{m}\,\xi_j)(\Re\mathrm{e}\,\xi_k - i\Im\mathrm{m}\,\xi_k)\right)}$$

$$\underset{(4)}{\ge} \; C \left(\sum_{j=1}^n |\Re\mathrm{e}\,\xi_j|^2 + |\Im\mathrm{m}\,\xi_j|^2 \right) \;=\; C\,|\xi|^2$$

d.h. (4) $\Longleftrightarrow$ (5) *Elliptizitätsbedingung*

Gebiete

Definition 1.2 *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet und* $m \in \mathbb{N}$. Ω *gehört zur Klasse* C^m, $\Omega \in \mathsf{C}^m$, *falls es endlich viele offene Kugeln* K_i, $i = 1, \ldots, N$, *mit folgenden Eigenschaften gibt :*

(i) $\partial\Omega \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^N K_i, \quad K_i \,\cap\, \partial\Omega \ne \emptyset$

(ii) *Es gibt Funktionen* $\psi^{(i)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi^{(i)} \in \mathsf{C}^m\left(\overline{K_i}\right)$, $i = 1, \ldots, N$, *die* K_i *eineindeutig auf* $\psi^{(i)}(K_i) \subset \mathbb{R}^n$ *abbilden; dabei seien* $\psi^{(i)}\left(\partial\Omega \cap \overline{K_i}\right) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; x_n = 0\}$, $\psi^{(i)}(\Omega \cap K_i) \subset \mathbb{R}^n_+$ *einfach zusammenhängend, und*

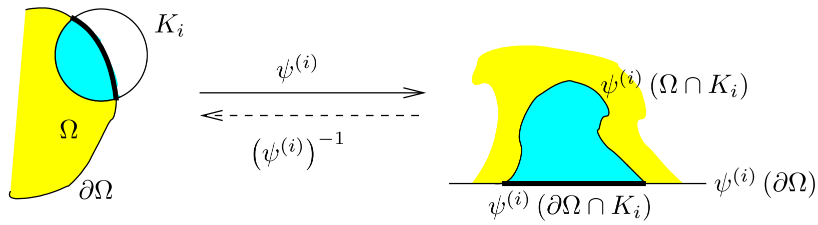
$$\frac{\partial\left(\psi_1^{(i)}(x), \ldots, \psi_n^{(i)}(x)\right)}{\partial\,(x_1, \ldots, x_n)} \;\ne\; 0, \quad x \in \overline{K_i}.$$

$\psi^{(i)} = \left(\psi_1^{(i)}, \ldots, \psi_n^{(i)}\right)$

$\psi_k^{(i)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$

$\psi_k^{(i)} \in \mathrm{C}^m\left(\overline{K_i}\right),$

$k = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, N$



Bemerkung : sei lokal auf $\partial\Omega : x_n = \varphi(x')$

o.B.d.A. $\varphi(0) = 0, \ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}(0) = 0, \ j = 1, \ldots, n-1, \ \varphi$ differenzierbar

setzen $\psi(x) = (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)) := (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n - \varphi(x')) \dashrightarrow \psi$ differenzierbar,

$$\psi(\partial\Omega) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n = 0\}$$

Plan der Vorlesung

1. Δ klassisch, Eigenschaften, harmonische Funktionen
2. *Potentialtheorie, Randwertprobleme, Fredholmsche Integralgleichungen*
3. Distributionen
4. Sobolev-Räume
5. Elliptische Differentialgleichungen : L_2-Theorie
6. *Spektraltheorie in Hilbert- und Banach-Räumen*

1.2 Singularitätenlösung, Integraldarstellung

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, betrachten *Laplace-Gleichung* bzw. *homogene Potential-Gleichung*

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) \ = \ 0, \quad x \in \Omega \tag{6}$$

Bemerkung : beschreibt Potential einer stationären Strömung, eines elektromagnetischen Feldes

Bezeichnung: $K_n = K_n(0) \ \ldots \ n-$dimensionale Einheitskugel, $\omega_n = \partial K_n \ \ldots \ n$-dimensionale Sphäre

$$|\omega_n| = \frac{2\sqrt{\pi}^{\,n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2\ \pi^m}{(m-1)!} & , \quad n = 2m \\ \frac{2^{m+1}\ \pi^m}{(2m-1)!!} & , \quad n = 2m+1 \end{array} \right\}$$

z.B. $|\omega_1| = 2, \ |\omega_2| = 2\pi, \ |\omega_3| = 4\pi, \ldots$

Radialsymmetrische Lösungen

suchen zunächst Lösungen $u(x)$ für (6) in $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, für die gilt

$$u(x) = v\left(r(x)\right), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad r = r(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}(r)\frac{\partial r}{\partial x_j} &&= v'(r)\,\frac{x_j}{r} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(v'(r)\,\frac{x_j}{r}\right) &&= v''(r)\frac{\partial r}{\partial x_j}\,\frac{x_j}{r} + \frac{v'(r)}{r}\frac{\partial x_j}{\partial x_j} + v'(r)\left(-\frac{x_j}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right) \\
&= v''(r)\frac{x_j^2}{r^2} + \frac{v'(r)}{r} - v'(r)\frac{x_j}{r^2}\frac{x_j}{r} &&= v''(r)\frac{x_j^2}{r^2} + \frac{v'(r)}{r} - v'(r)\frac{x_j^2}{r^3} \\
\Longrightarrow \quad \Delta u(x) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) &&= \frac{v''(r)}{r^2}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}_{r^2} + \frac{v'(r)}{r}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} 1}_{n} - \frac{v'(r)}{r^3}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}_{r^2} \\
&= v''(r) + \frac{n-1}{r}\,v'(r)
\end{aligned}$$

$\curvearrowright \ \Delta u(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \overset{!}{=} v''(r) + \dfrac{n-1}{r}\,v'(r)$

$n = 2 \ : \ 0 = v''(r) + \dfrac{v'(r)}{r} \quad \Longrightarrow \quad v(r) = c_1 + c_2 \ln r$ allgemeine Lösung

$n \geq 3 \ : \ 0 = v''(r) + \dfrac{n-1}{r}\,v'(r) \quad \Longrightarrow \quad v(r) = c_1 + c_2\, r^{2-n}$ allgemeine Lösung

(*Ansatz* $v(r) = r^{\varkappa} \dashrightarrow \varkappa(\varkappa-1) + \varkappa(n-1) = 0 \dashrightarrow \varkappa = 0, 2-n$)

$$\Longrightarrow \quad u(x) = \left\{ \begin{array}{ll} c\,\ln|x| & , \ n = 2 \\ c\,|x|^{2-n} & , \ n \geq 3 \end{array} \right\}$$ radialsymmetrische Lösungen von $\Delta u(x) = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

mit $w(x) := u(x - x^0)$ löst $w(x)$ die Laplace-Gleichung $\Delta w(x) = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{x^0\}$

Satz 1.3 *Seien* $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes* C^1*-Gebiet,* $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$, *und* $\Delta u(x) = f(x)$, $x \in \Omega$. *Für* $x^0 \in \Omega$ *gilt dann*

$$u\left(x^0\right) = \frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\left[\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{|\sigma - x^0|^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) - u(\sigma)\frac{\partial}{\partial \nu}\,\frac{1}{|\sigma - x^0|^{n-2}}\right)\mathrm{d}\sigma - \int_{\Omega}\frac{f(x)}{|x - x^0|^{n-2}}\,\mathrm{d}x\right],$$

wobei ν *die äußere Normale auf* $\partial\Omega$ *bezeichnet.*

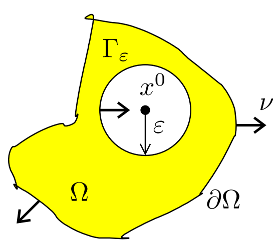
Bemerkung : $n = 2$:

$$u\left(x^0\right) = \frac{1}{2\pi}\left[-\int_{\partial\Omega}\left(\ln\left|\sigma - x^0\right|\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) - u(\sigma)\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\left|\sigma - x^0\right|\right)\mathrm{d}\sigma + \int_{\Omega} f(x)\ln\left|x - x^0\right|\,\mathrm{d}x\right]$$

B e w e i s : *Idee* : Greensche Formel (2) anwenden für $u(x)$ und $\left|x - x^0\right|^{2-n}$
$\curvearrowright$ suchen Gebiet G, so dass Voraussetzungen erfüllt sind

sei $x^0 \in \Omega$, Ω offen $\Longrightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0 \ : \ K_\varepsilon(x^0) \subset \Omega$, sei $\Gamma_\varepsilon := \partial K_\varepsilon(x^0)$

setzen $G := \Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(x^0)}$ $\dashrightarrow$ Voraussetzungen des Greenschen Satzes sind erfüllt, da $g_{x^0}(x) := \left|x - x^0\right|^{2-n} \in \mathrm{C}^2(G)$; wenden (2) auf u und g_{x^0} an $\curvearrowright$



$$\int_{\partial G}\left[\frac{1}{\left|\sigma-x^0\right|^{n-2}}\,\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\,\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{\left|\sigma-x^0\right|^{n-2}}\right]\mathrm{d}\sigma \;=\; \int_G\Big[\;\left|x-x^0\right|^{2-n}\;\underbrace{\Delta u(x)}_{f(x)}\;-\;u(x)\;\underbrace{\Delta\left|x-x^0\right|^{2-n}}_{0,\;x^0\notin\overline{G}}\;\Big]\,\mathrm{d}x$$
$$=\;\int_G\frac{f(x)}{\left|x-x^0\right|^{n-2}}\;\mathrm{d}x$$

$$\Omega=\overbrace{\left(\Omega\setminus\overline{K_\varepsilon(x^0)}\right)}^{G}\cup\overline{K_\varepsilon(x^0)}\;=\;G\;\cup\;\overline{K_\varepsilon(x^0)},\;\;\partial G=\partial\Omega\;\cup\;\Gamma_\varepsilon\;\curvearrowright$$

$$\int_\Omega\frac{f(x)}{\left|x-x^0\right|^{n-2}}\;\mathrm{d}x-\int_{K_\varepsilon(x^0)}\frac{f(x)}{\left|x-x^0\right|^{n-2}}\;\mathrm{d}x\;=\;\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{\left|\sigma-x^0\right|^{n-2}}\,\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\,\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{\left|\sigma-x^0\right|^{n-2}}\right]\mathrm{d}\sigma$$
$$+\int_{\Gamma_\varepsilon}\left[\frac{1}{\left|\sigma-x^0\right|^{n-2}}\,\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\,\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{\left|\sigma-x^0\right|^{n-2}}\right]\mathrm{d}\sigma$$

<u>*g.z.z.*</u> : (i) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow0}\int_{K_\varepsilon(x^0)}\frac{f(x)}{\left|x-x^0\right|^{n-2}}\;\mathrm{d}x\;=\;0$

(ii) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left|\sigma-x^0\right|^{2-n}\;\frac{\partial u}{\partial\nu}(\sigma)\;\mathrm{d}\sigma\;=\;0$

(iii) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow0}\int_{\Gamma_\varepsilon}u(\sigma)\;\frac{\partial}{\partial\nu}\left|\sigma-x^0\right|^{2-n}\;\mathrm{d}\sigma\;=\;(n-2)\left|\omega_n\right|\;u\left(x^0\right)$

zu (i) : $$\left|\int_{K_\varepsilon(x^0)}\frac{f(x)}{\left|x-x^0\right|^{n-2}}\;\mathrm{d}x\right|\le\;\underbrace{\max_{x\in\overline{\Omega}}|f(x)|}_{\le c}\int_{|x-x^0|\le\varepsilon}\left|x-x^0\right|^{2-n}\;\mathrm{d}x\;\underset{y\,=\,\frac{x-x^0}{\varepsilon}}{=}\;c\int_{|y|\le1}\underbrace{\varepsilon^{2-n}\;|y|^{2-n}}_{|x-x^0|^{2-n}}\underbrace{\varepsilon^n\,\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}x}$$
$$=\;c\,\varepsilon^2\int_{|y|\le1}|y|^{2-n}\,\mathrm{d}y\;=\;c\,\varepsilon^2\;\underbrace{\int_0^1 r^{2-n}r^{n-1}\int_{\omega_n}\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}r}_{\le c_n}\;\le\;c'\;\varepsilon^2\;\xrightarrow[\varepsilon\downarrow0]{}0$$

zu (ii) : $\sigma\in\Gamma_\varepsilon\subset\Omega,\;\;u\in\mathsf{C}^2(\Omega)\quad\Longrightarrow\quad\displaystyle\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(\sigma)\right|\le\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(\sigma)\right|\underbrace{|\nu_j|}_{\le1}\;\le\;c$ auf Γ_ε

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon}\left|\sigma-x^0\right|^{2-n}\;\frac{\partial u}{\partial\nu}(\sigma)\;\mathrm{d}\sigma\right|\le\;\int_{\Gamma_\varepsilon}\left|\sigma-x^0\right|^{2-n}\;\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(\sigma)\right|\;\mathrm{d}\sigma\;\;\le\;\;c\int_{|\sigma-x^0|=\varepsilon}\underbrace{\left|\sigma-x^0\right|^{2-n}}_{\varepsilon^{2-n}}\;\mathrm{d}\sigma$$
$$=\;c\,\varepsilon^{2-n}\;\underbrace{\int_{|\sigma-x^0|=\varepsilon}\mathrm{d}\sigma}_{\varepsilon^{n-1}|\omega_n|}\;=\;c_n'\;\varepsilon\;\;\xrightarrow[\varepsilon\,\downarrow\,0]{}\;\;0$$

zu (iii) : $\sigma \in \Gamma_\varepsilon,\ \nu = \nu(\sigma) = -\dfrac{\sigma - x^0}{|\sigma - x^0|} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\partial}{\partial \nu} = -\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\dfrac{\sigma_j - x_j^0}{|\sigma - x^0|}}_{-\nu_j} = -\dfrac{\partial}{\partial r}, \quad r = |\sigma - x^0|$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \underbrace{\left|\sigma - x^0\right|^{2-n}}_{r^{2-n}} = -\frac{\partial}{\partial r} r^{2-n} = (n-2)\, r^{1-n} \underset{r\,=\,|\sigma - x^0|\,=\,\varepsilon}{=} (n-2)\, \varepsilon^{1-n}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u(\sigma)\, \frac{\partial}{\partial \nu} \left|\sigma - x^0\right|^{2-n} \mathrm{d}\sigma &= \int\limits_{|\sigma - x^0| = \varepsilon} u(\sigma)\, \underbrace{(n-2)\, \varepsilon^{1-n}}_{\frac{\partial}{\partial \nu}|\sigma - x^0|^{2-n}} \mathrm{d}\sigma \\
&= (n-2)\, \varepsilon^{1-n} \int\limits_{|\sigma - x^0| = \varepsilon} \left[u(x^0) + u(\sigma) - u(x^0)\right] \mathrm{d}\sigma \\
&= (n-2)\, \varepsilon^{1-n}\, u(x^0) \underbrace{\int\limits_{|\sigma - x^0| = \varepsilon} \mathrm{d}\sigma}_{\varepsilon^{n-1}|\omega_n|} - (n-2)\, \varepsilon^{1-n} \int\limits_{|\sigma - x^0| = \varepsilon} \left[u(x^0) - u(\sigma)\right] \mathrm{d}\sigma \\
&= (n-2)\, |\omega_n|\, u(x^0) - (n-2)\, \varepsilon^{1-n} \int\limits_{|\sigma - x^0| = \varepsilon} \left[u(x^0) - u(\sigma)\right] \mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

<u>n.z.z.</u> : $\quad \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} (n-2)\, \varepsilon^{1-n} \int\limits_{|\sigma - x^0| = \varepsilon} \left[u(x^0) - u(\sigma)\right] \mathrm{d}\sigma = 0$

$u \in \mathsf{C}^2(\Omega),\ \overline{K_\varepsilon(x^0)} \subset \Omega \quad\Longrightarrow\quad \max\limits_{|\sigma - x^0| = \varepsilon} \left|u(x^0) - u(\sigma)\right| \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\longrightarrow} 0$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \left|(n-2)\, \varepsilon^{1-n} \int\limits_{|\sigma - x^0| = \varepsilon} \left[u(x^0) - u(\sigma)\right] \mathrm{d}\sigma\right| &\le (n-2)\, \varepsilon^{1-n} \max_{|\sigma - x^0| = \varepsilon} \left|u(x^0) - u(\sigma)\right| \overbrace{\int\limits_{|\sigma - x^0| = \varepsilon} \mathrm{d}\sigma}^{\varepsilon^{n-1}|\omega_n|} \\
&\le (n-2)\, |\omega_n| \max_{|\sigma - x^0| = \varepsilon} \left|u(x^0) - u(\sigma)\right| \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

□

Definition 1.4 *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes* C^1*-Gebiet,* $n \ge 2$*, und* $x^0 \in \Omega$*. Dann heißt*

$$\gamma_{x^0}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln\left|x - x^0\right| + \Phi(x) & , \quad n = 2 \\ \dfrac{1}{(n-2)|\omega_n|} \dfrac{1}{\left|x - x^0\right|^{n-2}} + \Phi(x) & , \quad n \ge 3 \end{cases}$$

Grundlösung *für* Δ *zu* $x^0 \in \Omega$*, falls* $\Phi(x) \in \mathsf{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *mit* $\Delta\Phi(x) = 0,\ x \in \Omega$*, gilt.*

Satz 1.5 (Greensche Darstellungsformel)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes* C^1*-Gebiet,* $n \ge 2$*,* $u \in \mathsf{C}^2(\Omega)$*, und* $\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega$*. Für* $x^0 \in \Omega$ *gilt dann*

$$u\left(x^0\right) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[\gamma_{x^0}(\sigma) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) - u(\sigma) \frac{\partial \gamma_{x^0}}{\partial \nu}(\sigma)\right] \mathrm{d}\sigma - \int\limits_{\Omega} \gamma_{x^0}(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

wobei ν *die äußere Normale auf* $\partial\Omega$ *und* $\gamma_{x^0}(x)$ *die Grundlösung für* Δ *zu* x^0 *bezeichnen.*

Beweis : Satz 1.3 & Definition 1.4 $\curvearrowright$

$$\begin{aligned}
u\left(x^0\right) &= \int\limits_{\partial\Omega}\left[(\gamma_{x^0}-\Phi)(\sigma)\frac{\partial u}{\partial\nu}(\sigma)-u(\sigma)\frac{\partial(\gamma_{x^0}-\Phi)}{\partial\nu}(\sigma)\right]\,\mathrm{d}\sigma-\int\limits_{\Omega}(\gamma_{x^0}-\Phi)(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\partial\Omega}\left[\gamma_{x^0}(\sigma)\frac{\partial u}{\partial\nu}(\sigma)-u(\sigma)\frac{\partial\gamma_{x^0}}{\partial\nu}(\sigma)\right]\,\mathrm{d}\sigma-\int\limits_{\Omega}\gamma_{x^0}(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad -\underbrace{\left(\int\limits_{\partial\Omega}\left[\Phi(\sigma)\frac{\partial u}{\partial\nu}(\sigma)-u(\sigma)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\sigma)\right]\,\mathrm{d}\sigma-\int\limits_{\Omega}\Phi(x)\,\Delta u(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{0,\ \text{Greenscher Satz (2)}}
\end{aligned}$$

$\square$

1.3 Greensche Funktionen

Definition 1.6 *Sei* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *ein beschränktes* C^1*-Gebiet,* $n\geq 2$*. Dann heißt* $g(x^0,x):\Omega\times\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ Greensche Funktion *zu* Ω*, falls für beliebige* $x^0\in\Omega$ *gilt*

(i) $g(x^0,x)$ *Grundlösung von* Δ *zu* x^0*, d.h.* $\Delta_x g(x^0,x) = 0,\ x\in\Omega\setminus\{x^0\}$

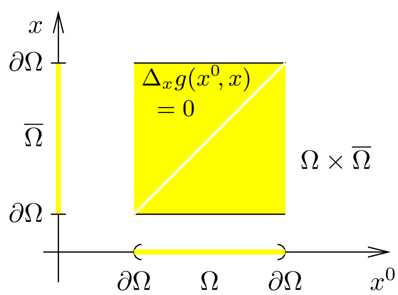
(ii) $g(x^0,y) = 0,\ y\in\partial\Omega$

Eigenschaften

(i) $0 \leq g(x^0,x) \leq \dfrac{1}{(n-2)|\omega_n|}\,\dfrac{1}{|x-x^0|^{n-2}}\,,\quad n\geq 3$

(ii) $g(x^0,x) = g(x,x^0),\quad x,x^0\in\Omega,\ x\neq x^0$

(*hier ohne Beweis*)



Idee : seien $g(x^0,x)$ Greensche Funktion zu Δ, u Lösung von

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) &= f(x)\quad,\quad x\in\Omega \\
u(y) &= \varphi(y)\quad,\quad y\in\partial\Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xRightarrow[\text{Satz 1.5}]{} u\left(x^0\right) &= \int\limits_{\partial\Omega}\Big[\underbrace{\gamma_{x^0}(\sigma)}_{g(x^0,\sigma)=0}\frac{\partial u}{\partial\nu}(\sigma)-\underbrace{u(\sigma)}_{\varphi(\sigma)}\frac{\partial}{\partial\nu}\underbrace{\gamma_{x^0}(\sigma)}_{g(x^0,\sigma)}\Big]\mathrm{d}\sigma-\int\limits_{\Omega}\underbrace{\gamma_{x^0}(x)}_{g(x^0,x)}\,f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int\limits_{\partial\Omega}\varphi(\sigma)\,\frac{\partial g(x^0,\sigma)}{\partial\nu}\,\mathrm{d}\sigma-\int\limits_{\Omega}g(x^0,x)\,f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

d.h. Kenntnis von $g(x^0,x)$ $\dashrightarrow$ Lösungsformel für $u(x^0)$, $x^0\in\Omega$

'Konstruktion' von $g(x^0,x)$

o.B.d.A. $n\geq 3$, Definition 1.6 (i) & Definition 1.4 $\curvearrowright$

$$g(x^0,x)=\frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\,\frac{1}{|x-x^0|^{n-2}}+\Phi_{x^0}(x)\ \xRightarrow[y\,\in\,\partial\Omega]{}\ g(x^0,y)=\frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\,\frac{1}{|y-x^0|^{n-2}}+\Phi_{x^0}(y)\stackrel{!}{=}0$$

d.h. man muss für alle $x^0 \in \Omega$ das Randwertproblem für Φ_{x^0},

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{x^0}(x) &= 0 &, \quad x \in \Omega \\ \Phi_{x^0}(y) &= -\frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\,\frac{1}{|y-x^0|^{n-2}} &, \quad y \in \partial\Omega \end{aligned}$$

lösen $\dashrightarrow$ $g(x^0,x) := \dfrac{1}{(n-2)|\omega_n|}\,\dfrac{1}{|x-x^0|^{n-2}} + \Phi_{x^0}(x)$ $\dashrightarrow$ $u(x^0)$ $\curvearrowright$ i.a. nicht einfacher

Spiegelungsprinzip

für spezielle ('symmetrische') Gebiete[7] kann (ein) $g(x^0,x)$ relativ einfach konstruiert werden

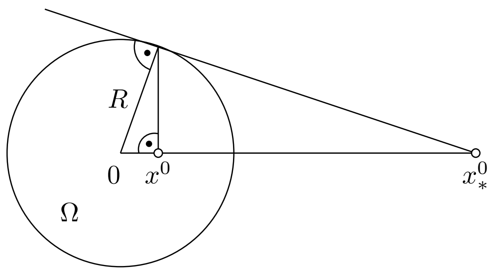
Satz 1.7 *Seien* $n \geq 3$, $R > 0$ *und* $x^0 \in \Omega = K_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. *Dann ist*

$$g(x^0,x) = \frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\begin{cases} \left[\dfrac{1}{|x-x^0|^{n-2}} - \left(\dfrac{R}{|x^0|}\right)^{n-2}\dfrac{1}{|x-x^0_*|^{n-2}}\right] &, \quad x^0 \neq 0 \\ \left[\dfrac{1}{|x|^{n-2}} - \dfrac{1}{R^{n-2}}\right] &, \quad x^0 = 0 \end{cases}$$

mit $x^0_* = x^0\,\dfrac{R^2}{|x^0|^2}$, $x^0 \neq 0$, *eine Greensche Funktion für* Ω.

Beweis: $\Omega = K_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $R > 0$, sei $x^0 \in \Omega \setminus \{0\}$, sei x^0_* der am Kreis gespiegelte Punkt von x^0,

$$x^0_* = x^0\,\frac{R^2}{|x^0|^2}$$



$\dashrightarrow$ eineindeutige Zuordnung

$$\mathbb{R}^n \setminus K_R(0) \quad \longleftrightarrow \quad \overline{K_R(0)} \setminus \{0\}\ ,$$

wobei $\partial K_R(0)$ Fixmenge ist

suchen Φ_{x^0} mit

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{x^0}(x) &= 0 &, \quad |x| < R \\ \Phi_{x^0}(y) &= \underbrace{-\frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\,\frac{1}{|y-x^0|^{n-2}}}_{=:\widetilde{\gamma}_{x^0}(y)}, & |y| = R \end{aligned}$$

Pythagoras $\curvearrowright$

$$|x^0_*|^2 - R^2 = |x^0_* - x^0|^2 + R^2 - |x^0|^2$$

$$x^0_* = \lambda x^0 \implies |x^0|^2\left[\lambda^2 - (\lambda-1)^2 + 1\right] = 2R^2$$

$$\iff |x^0|^2\lambda = R^2 \iff \lambda = \frac{R^2}{|x^0|^2}$$

Ansatz: $\Phi_{x^0}(x) := c(x^0)\,\widetilde{\gamma}_{x^0_*}(x) = \dfrac{c(x^0)}{(n-2)|\omega_n|}\,\dfrac{1}{|x-x^0_*|^{n-2}}$

$$\implies \quad \Delta_x\Phi_{x^0}(x) = \frac{c(x^0)}{(n-2)|\omega_n|}\,\underbrace{\Delta_x\frac{1}{|x-x^0_*|^{n-2}}}_{0,\,|x|<R<|x^0_*|} = 0, \quad |x| < R$$

sei $|y| = R \implies \Phi_{x^0}(y) = \dfrac{c(x^0)}{(n-2)|\omega_n|}\,\dfrac{1}{|y-x^0_*|^{n-2}} \overset{!}{=} -\dfrac{1}{(n-2)|\omega_n|}\,\dfrac{1}{|y-x^0|^{n-2}}$

$$\iff \frac{c(x^0)}{|y-x^0_*|^{n-2}} = -\frac{1}{|y-x^0|^{n-2}} \iff c(x^0)\ |y-x^0|^{n-2} = -\ |y-x^0_*|^{n-2}$$

[7] z.B. Kreis, Kugel, Halbraum und Schnittmengen davon, z.B. Halbkugel, $\sim$-kreis, Viertelkugel, $\sim$-kreis ...

$$|y-x_*^0|^2 = \left|y - x^0\,\frac{R^2}{|x^0|^2}\right|^2 \qquad = \left\langle y - x^0\,\frac{R^2}{|x^0|^2}, y - x^0\,\frac{R^2}{|x^0|^2}\right\rangle$$

$$= \underbrace{|y|^2}_{R^2} - 2\,\frac{R^2}{|x^0|^2}\underbrace{\langle y, x^0\rangle}_{\in\mathbb{R}} + \left(\frac{R^2}{|x^0|^2}\right)^2 |x^0|^2 = \frac{R^2}{|x^0|^2}\underbrace{\left(|x^0|^2 - 2\langle y, x^0\rangle + R^2\right)}_{|x^0-y|^2,\ |y|=R}$$

$$= \frac{R^2}{|x^0|^2}\,|y-x^0|^2$$

$$\Longrightarrow \quad c(x^0) = -\left(\frac{|y-x_*^0|}{|y-x^0|}\right)^{n-2} = -\left(\frac{R}{|x^0|}\right)^{n-2}, \quad x^0 \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi_{x^0}(x) = -\frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\begin{cases} \left(\frac{R}{|x^0|}\right)^{n-2} \frac{1}{|x-x_*^0|^{n-2}} & , \quad x^0 \neq 0 \\ \frac{1}{R^{n-2}} & , \quad x^0 = 0 \end{cases} \qquad \square$$

Bemerkung : $n=2,\ R>0,\ x^0 \in \Omega = K_R(0) \subset \mathbb{R}^2$, mit $x_*^0 = x^0\,\frac{R^2}{|x^0|^2}$ für $x^0 \neq 0$,

$$g(x^0,x) = -\frac{1}{2\pi}\begin{cases} \left[\ln|x-x^0| - \ln|x-x_*^0| + \ln\frac{R}{|x^0|}\right] & , \quad x^0 \neq 0 \\ [\ln|x| - \ln R] & , \quad x^0 = 0 \end{cases}$$

Satz 1.8 *Seien* $n \geq 2,\ R>0,\ \Omega = K_R(0) \subset \mathbb{R}^n,\ u \in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *mit* $\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega$. *Dann gilt für* $x^0 \in \Omega$

$$u\left(x^0\right) = \frac{R^2 - |x^0|^2}{R\,|\omega_n|}\int\limits_{|y|=R}\frac{u(y)}{|y-x^0|^n}\,\mathrm{d}\sigma_y\ .$$

Beweis : Satz 1.5 mit $\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega,\ \gamma_{x^0}(y) = g(x^0,y) = 0,\ y \in \partial\Omega \ \curvearrowright$

$$u\left(x^0\right) = \int\limits_{\partial\Omega}\left[\underbrace{\gamma_{x^0}(\sigma)}_{0}\frac{\partial u}{\partial\nu}(\sigma) - u(\sigma)\frac{\partial\gamma_{x^0}}{\partial\nu}(\sigma)\right]\mathrm{d}\sigma - \int\limits_{\Omega}\underbrace{\gamma_{x^0}(x)}_{g(x^0,x)}\underbrace{\Delta u(x)}_{0}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{|y|=R} u(y)\frac{\partial g}{\partial\nu}(x^0,y)\,\mathrm{d}\sigma_y \qquad (7)$$

$$|y| = R \quad \Longrightarrow \quad \nu = \frac{y}{R} \quad \Longrightarrow \quad \nu_j = \frac{y_j}{R},\ j = 1,\ldots,n$$

o.B.d.A. $n \geq 3,\ x^0 \neq 0$ (*andere Fälle analog*)

$$g(x^0,x) = \frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\left[\frac{1}{|x-x^0|^{n-2}} - \left(\frac{R}{|x^0|}\right)^{n-2}\frac{1}{|x-x_*^0|^{n-2}}\right]$$

$$\curvearrowright \quad \frac{\partial g}{\partial\nu}(x^0,y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j}(x^0,y)\underbrace{\frac{y_j}{R}}_{\nu_j} = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^n\frac{\partial g}{\partial y_j}(x^0,y)\,y_j \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial y_j}(x^0,y) &= \frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\left[\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{|y-x^0|^{n-2}}\right) - \left(\frac{R}{|x^0|}\right)^{n-2}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{|y-x^0_*|^{n-2}}\right)\right]\\
&= \frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\left[\frac{-n+2}{|y-x^0|^{n-1}}\,\frac{y_j-x^0_j}{|y-x^0|} - \left(\frac{R}{|x^0|}\right)^{n-2}\frac{-n+2}{|y-x^0_*|^{n-1}}\,\frac{y_j-(x^0_*)_j}{|y-x^0_*|}\right]\\
&= -\frac{1}{|\omega_n|}\left[\frac{y_j-x^0_j}{|y-x^0|^n} - \left(\frac{R}{|x^0|}\right)^{n-2}\frac{y_j-\frac{R^2}{|x^0|^2}x^0_j}{|y-x^0_*|^n}\right]
\end{aligned}$$

Beweis Satz 1.7 $\Longrightarrow \quad \left|y-x^0_*\right| = \dfrac{R}{|x^0|}\left|y-x^0\right|, \quad |y|=R$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y_j}(x^0,y) &= -\frac{1}{|\omega_n|}\left[\frac{y_j-x^0_j}{|y-x^0|^n} - \left(\frac{|x^0|}{R}\right)^2\frac{y_j-\frac{R^2}{|x^0|^2}x^0_j}{|y-x^0|^n}\right] = -\frac{1}{|\omega_n|}\,\frac{y_j-x^0_j-\frac{|x^0|^2}{R^2}y_j+x^0_j}{|y-x^0|^n}\\
&= -\frac{1}{|\omega_n|}\,\frac{R^2-\left|x^0\right|^2}{R^2}\,\frac{y_j}{|y-x^0|^n}
\end{aligned}$$

$$\underset{(8)}{\Longrightarrow} \frac{\partial g}{\partial \nu}(x^0,y) = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j}(x^0,y)\;y_j = -\frac{R^2-\left|x^0\right|^2}{R^3|\omega_n|}\,\frac{1}{|y-x^0|^n}\underbrace{\sum_{j=1}^n y_j^2}_{|y|^2=R^2} = -\frac{R^2-\left|x^0\right|^2}{R|\omega_n|}\,\frac{1}{|y-x^0|^n}$$

$$\underset{(7)}{\Longrightarrow} \quad u\left(x^0\right) = \frac{R^2-\left|x^0\right|^2}{R\;|\omega_n|}\int\limits_{|y|=R}\frac{u(y)}{|y-x^0|^n}\,\mathrm{d}\sigma_y$$

$\square$

Bemerkung : $\quad u\equiv 1 \underset{\text{Satz 1.8}}{\Longrightarrow} 1 = \dfrac{R^2-\left|x^0\right|^2}{R\;|\omega_n|}\displaystyle\int\limits_{|y|=R}\frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|y-x^0|^n}\,, \quad n\geq 2, \quad |x^0|<R$ (9)

1.4 Harmonische Funktionen

Definition 1.9 *Sei* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *ein zusammenhängendes Gebiet. Eine Funktion* $u\in \mathrm{C}^2(\Omega)\cap \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ *heißt* harmonisch in $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, *wenn* $\Delta u(x)=0$ *für* $x\in\Omega$ *gilt.*

Bemerkung :

- $n=1$: $u(x)$ harmonisch $\Longleftrightarrow$ $u(x)=ax+b,\; a,b\in\mathbb{R}$
- $n\geq 2$: Lösungsraum der Laplace-Gleichung unendlich-dimensional, z.B. sind für $n=2$ alle Polynome $1,\,x,\,y,\,xy,\,x^2-y^2,\,x^3-3xy^2,\,y^3-3x^2y,\ldots$ harmonisch, aber auch $\sin(ay)e^{ax},\;\cos(ay)e^{ax}\;,\ldots$

Definition 1.10 (Mittelwerteigenschaft)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein zusammenhängendes Gebiet.

(i) *Eine Funktion $u \in \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ besitzt in Ω die* Flächenmittelwert-Eigenschaft, *wenn für alle $x^0 \in \Omega$ und alle $R > 0$ mit $K_R(x^0) \subset \Omega$ stets gilt*

$$u(x^0) \;=\; \frac{1}{R^{n-1}|\omega_n|} \int\limits_{|y-x^0|=R} u(y)\,\mathrm{d}\sigma_y \;.$$

(ii) *Eine Funktion $u \in \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ besitzt in Ω die* Volumenmittelwert-Eigenschaft, *wenn für alle $x^0 \in \Omega$ und alle $R > 0$ mit $K_R(x^0) \subset \Omega$ stets gilt*

$$u(x^0) \;=\; \frac{n}{R^n|\omega_n|} \int\limits_{|x-x^0|\le R} u(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

Satz 1.11 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet und $u \in \mathrm{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}\right)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent :*

(i) u *ist harmonisch in Ω, d.h. $\Delta u(x) = 0,\; x \in \Omega$*

(ii) u *besitzt die Flächenmittelwert-Eigenschaft*

(iii) u *besitzt die Volumenmittelwert-Eigenschaft*

Beweis : <u>(ii) $\Longrightarrow$ (iii)</u> : seien $x^0 \in \Omega,\; R > 0$ und $K_R(x^0) \subset \Omega$

$$\Longrightarrow \quad \frac{n}{R^n|\omega_n|} \int\limits_{|x-x^0|\le R} u(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{n}{R^n|\omega_n|} \int\limits_0^R \underbrace{\int\limits_{|y-x^0|=r} u(y)\,\mathrm{d}\sigma_y}_{u(x^0)r^{n-1}|\omega_n|,\;\text{(ii)}}\,\mathrm{d}r \;=\; \frac{n\,u(x^0)}{R^n} \underbrace{\int\limits_0^R r^{n-1}\,\mathrm{d}r}_{\frac{R^n}{n}} \;=\; u(x^0)$$

<u>(iii) $\Longrightarrow$ (ii)</u> : sei $x^0 \in \Omega$,

$$\underset{\text{(iii)}}{\Longrightarrow} \; h(R) := \frac{R^n|\omega_n|}{n}\,u(x^0) \;-\; \int\limits_0^R \int\limits_{|y-x^0|=r} u(y)\,\mathrm{d}\sigma_y\,\mathrm{d}r \;\equiv\; 0 \qquad \forall\; R > 0,\; K_R(x^0) \subset \Omega$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \equiv h'(R) \;=\; R^{n-1}|\omega_n|\,u(x^0) - \int\limits_{|y-x^0|=R} u(y)\,\mathrm{d}\sigma_y \quad \Longleftrightarrow \quad u(x^0) \;=\; \frac{1}{R^{n-1}|\omega_n|} \int\limits_{|y-x^0|=R} u(y)\,\mathrm{d}\sigma_y$$

<u>(i) $\Longrightarrow$ (ii)</u> : betrachten sphärische Mittel

$$\mathcal{M}(R)u(x^0) = \frac{1}{R^{n-1}|\omega_n|} \int\limits_{|y-x^0|=R} u(y)\,\mathrm{d}\sigma_y \;=\; \frac{1}{|\omega_n|} \int\limits_{|\nu|=1} u(x^0 + R\nu)\,\mathrm{d}\sigma_\nu$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{R\downarrow 0}\, \mathcal{M}(R)u(x^0) \;=\; \frac{1}{|\omega_n|} \int\limits_{|\nu|=1} \underbrace{\lim_{R\downarrow 0}\, u(x^0 + R\nu)}_{u(x^0)}\,\mathrm{d}\sigma_\nu \;=\; \frac{u(x^0)}{|\omega_n|} \underbrace{\int\limits_{|\nu|=1} \mathrm{d}\sigma_\nu}_{|\omega_n|} = u(x^0)$$

$\mathcal{M}(R)u(x^0)$ stetig in R, auch differenzierbar

$$\curvearrowright \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\mathcal{M}(R)u(x^0) \ = \ \frac{1}{|\omega_n|}\int\limits_{|\nu|=1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}R}(x^0+R\nu)\,\mathrm{d}\sigma_\nu \ = \ \frac{1}{|\omega_n|}\int\limits_{|\nu|=1}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x^0+R\nu)\ \nu_j}_{\langle \operatorname{grad} u(x^0+R\nu),\,\nu\rangle}\,\mathrm{d}\sigma_\nu$$

$$\underset{\text{Satz v. Gauß}}{=} \frac{1}{|\omega_n|}\int\limits_{|\nu|\le 1}\underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)}_{\Delta u}(x^0+R\nu)\,\mathrm{d}\nu \ = \ \frac{1}{|\omega_n|}\int\limits_{|\nu|\le 1}\Delta u(x^0+R\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

d.h. $\Delta u(x)=0,\ x\in\Omega\supset K_R(x^0) \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\mathcal{M}(R)u(x^0)=0 \implies \mathcal{M}(R)u(x^0)\equiv c$

$\lim\limits_{R\downarrow 0}\ \mathcal{M}(R)u(x^0)=u(x^0) \implies \mathcal{M}(R)u(x^0)=u(x^0),\ \ R>0$ mit $K_R(x^0)\subset\Omega$

<u>(ii) $\implies$ (i)</u> : *zeigen* $\Delta u(x^0)=0,\ \ x^0\in\Omega$; seien $R>0$ mit $K_R(x^0)\subset\Omega,\ \ \mathcal{M}(R)u(x^0)\equiv u(x^0)$

$$\curvearrowright\ 0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\mathcal{M}(R)u(x^0)=\frac{1}{|\omega_n|}\int\limits_{|\nu|\le 1}\Delta u(x^0+R\nu)\,\mathrm{d}\nu \ = \ \frac{1}{|\omega_n|}\int\limits_{|y-x^0|\le R}\Delta u(y)\,\mathrm{d}y \tag{10}$$

<u>*Annahme*</u> : $\Delta u(x^0)>0 \underset{\text{stetig}}{\implies} \exists\,\delta>0\ \forall\,y\in K_\delta(x^0):\Delta u(y)>0$ ↯ zu (10); analog für $\Delta u(x^0)<0$ □

Bemerkung : aus Beweis '(i) $\implies$ (ii)' ersichtlich:

$$\begin{aligned} \Delta u(x)\ge 0 \ \text{ in } \Omega &\implies u(x^0)\le\mathcal{M}(R)u(x^0),\quad \forall\,x^0\in\Omega,\ R>0 \text{ mit } K_R(x^0)\subset\Omega\\ \Delta u(x)\le 0 \ \text{ in } \Omega &\implies u(x^0)\ge\mathcal{M}(R)u(x^0),\quad \forall\,x^0\in\Omega,\ R>0 \text{ mit } K_R(x^0)\subset\Omega \end{aligned}$$

Satz 1.12 (Maximum-Minimum-Prinzip)
Seien $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet und* u *reellwertig und harmonisch in* Ω*. Dann nimmt* $u(x)$ *sein Maximum und Minimum auf dem Rand* $\partial\Omega$ *an.*

B e w e i s : ausreichend, Aussage für Maximum zu beweisen

$\dashrightarrow v(x):=-u(x),\ x\in\overline{\Omega}$ harmonisch in Ω, $\min\limits_{x\in\overline{\Omega}}u(x)=-\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}v(x)=-\max\limits_{y\in\partial\Omega}v(y)\ =\ \min\limits_{y\in\partial\Omega}u(y)$

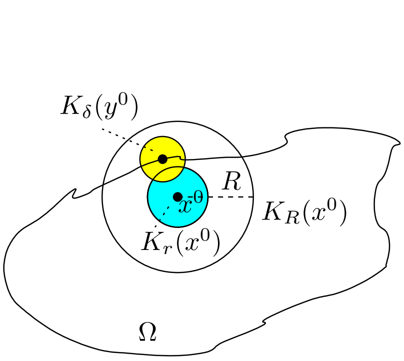
seien $M:=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}u(x),\ \ m:=\max\limits_{y\in\partial\Omega}u(y),\ \ M\ge m$

<u>*Annahme*</u> : $M>m$, d.h. $\exists\ x^0\in\mathring{\Omega}\ :\ M=u(x^0)$
wählen $R>0$ so, dass $K_R(x^0)\ \cap\ \partial\Omega\neq\emptyset$

$$\implies\ \exists\ y^0\in K_R(x^0)\ \cap\ \partial\Omega,\ u(y^0)\le\max_{y\in\partial\Omega}u(y)=m$$

u stetig auf $\overline{\Omega} \implies \exists\,\delta>0\ \ \forall\,x\in\overline{\Omega}\ \cap\ K_\delta(y^0)$:

$$u(x)\ \le m+\underbrace{\frac{M-m}{2}}_{\varepsilon}<M$$



wählen $r<R$ so, dass $\partial K_r(x^0)\ \cap\ K_\delta(y^0)\neq\emptyset$

$$
\begin{aligned}
u \text{ harmonisch } \xRightarrow[\text{Satz 1.11 (ii)}]{} u(x^0) &= \frac{1}{r^{n-1}|\omega_n|} \int\limits_{|y-x^0|=r} u(y)\,\mathrm{d}\sigma_y \\
&= \frac{1}{r^{n-1}|\omega_n|} \left(\int\limits_{\partial K_r(x^0)\,\cap\,K_\delta(y^0)} \overbrace{u(y)}^{<M}\,\mathrm{d}\sigma_y + \int\limits_{\partial K_r(x^0)\,\setminus\,K_\delta(y^0)} \overbrace{u(y)}^{\le M}\,\mathrm{d}\sigma_y \right) \\
&< M \frac{1}{r^{n-1}|\omega_n|} \underbrace{\int\limits_{\partial K_r(x^0)} \mathrm{d}\sigma_y}_{r^{n-1}|\omega_n|} = M
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \quad u(x^0) < M = u(x^0)$ ↯ $\quad \curvearrowright \quad M = m$ $\square$

Bemerkung :
- Eine in Ω harmonische Funktion ist durch ihre Randwerte eindeutig bestimmt.
- *aus Beweis ersichtlich* :

$$\Delta u(x) \ge 0 \quad \text{in } \Omega \quad \Longrightarrow \quad \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{y\in\partial\Omega} u(y) \tag{11}$$

$$\Delta u(x) \le 0 \quad \text{in } \Omega \quad \Longrightarrow \quad \min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min_{y\in\partial\Omega} u(y) \tag{12}$$

Folgerung 1.13 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes, zusammenhängendes* C^1*-Gebiet mit Greenscher Funktion* $g(x^0, x)$. *Dann gilt für alle* $x, x^0 \in \Omega,\ x \ne x^0$ *:*

(i) $n \ge 3, \quad 0 \le g(x^0, x) < \widetilde{\gamma}_{x^0}(x) = \dfrac{1}{(n-2)|\omega_n|} \dfrac{1}{|x - x^0|^{n-2}}$

(ii) $g(x^0, x) = g(x, x^0)$

Beweis : <u>zu (i)</u> : $g(x^0, x) = \gamma_{x^0}(x) = \widetilde{\gamma}_{x^0}(x) + \Phi_{x^0}(x)$ mit $\Delta\Phi_{x^0}(x) = 0,\ \Phi_{x^0}(y) = -\widetilde{\gamma}_{x^0}(y) < 0$

$\xRightarrow[\text{Satz 1.12}]{} \Phi_{x^0}(x) < 0,\ x \in \overline{\Omega} \quad \Longrightarrow \quad g(x^0, x) = \widetilde{\gamma}_{x^0}(x) + \Phi_{x^0}(x) < \widetilde{\gamma}_{x^0}(x)$

seien $x, x^0 \in \Omega,\ x \ne x^0,\ \delta > 0$ so, dass $K_\delta(x^0) \subset \Omega,\ \underbrace{\widetilde{\gamma}_{x^0}(x)}_{\uparrow\infty,\ x\to x^0} > \underbrace{|\Phi_{x^0}(x)|}_{\text{beschränkt}},\ x \in \overline{K_\delta(x^0)}$ (13)

$$\Longrightarrow \quad g(x, x^0) \text{ harmonisch in } \Omega \setminus K_\delta(x^0), \quad g(y, x^0) = \begin{cases} 0 & , \quad y \in \partial\Omega \\ \widetilde{\gamma}_{x^0}(y) + \Phi_{x^0}(y) \underset{(13)}{\ge} 0 & , \quad y \in \partial K_\delta(x^0) \end{cases}$$

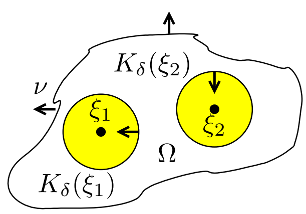
$$\Longrightarrow \quad g(x, x^0) \text{ harmonisch in } \Omega \setminus K_\delta(x^0), \quad g(y, x^0) \ge 0, \quad y \in \partial\left(\Omega \setminus K_\delta(x^0)\right)$$

$\xRightarrow[\text{Satz 1.12}]{} g(x, x^0) \ge 0, \quad x \in \Omega \setminus K_\delta(x^0) \underset{(13)}{\Longrightarrow} g(x, x^0) \ge 0, \quad x \in \Omega$

<u>zu (ii)</u> : seien $\xi_1, \xi_2 \in \Omega,\ \xi_1 \ne \xi_2,\ u(x) := g(\xi_1, x),\quad v(x) := g(\xi_2, x),\ x \in \Omega$

<u>*g.z.z.*</u> : $u(\xi_2) = v(\xi_1) \quad \Longleftrightarrow \quad g(\xi_2, \xi_1) = g(\xi_1, \xi_2)$

$\xi_1 \ne \xi_2 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \delta > 0 \ :\ K_\delta(\xi_1) \cap K_\delta(\xi_2) = \emptyset, \quad K_\delta(\xi_1),\ K_\delta(\xi_2) \subset \Omega$



u, v harmonisch in $\Omega_\delta := \Omega \setminus (K_\delta(\xi_1) \cup K_\delta(\xi_2))$, wenden *Satz von Green* auf u, v in Ω_δ an

$$\Longrightarrow \quad 0 = \int\limits_{\Omega_\delta} \Big[u(x) \underbrace{\Delta v(x)}_{0} - v(x) \underbrace{\Delta u(x)}_{0} \Big] \, \mathrm{d}x \underset{(2)}{=} \int\limits_{\partial\Omega_\delta} \Big[u(\sigma) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma) - v(\sigma) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) \Big] \, \mathrm{d}\sigma$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \Big[\underbrace{u(\sigma)}_{0} \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma) - \underbrace{v(\sigma)}_{0} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) \Big] \, \mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\partial K_\delta(\xi_1) \,\cup\, \partial K_\delta(\xi_2)} \Big[u(\sigma) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma) - v(\sigma) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) \Big] \, \mathrm{d}\sigma$$

$$= \underbrace{\int\limits_{\partial K_\delta(\xi_1)} \Big[u(\sigma) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma) - v(\sigma) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) \Big] \, \mathrm{d}\sigma}_{\underset{\delta \downarrow 0}{\longrightarrow} \; - \; v(\xi_1)} + \underbrace{\int\limits_{\partial K_\delta(\xi_2)} \Big[u(\sigma) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma) - v(\sigma) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) \Big] \, \mathrm{d}\sigma}_{\underset{\delta \downarrow 0}{\longrightarrow} \; u(\xi_2)}$$

analog zu (ii), (iii) im Beweis von Satz 1.3, da u, v spezielle Struktur (*Grundlösung*) haben □

Satz 1.14 **(i)** *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet,* $u \in \mathrm{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ *und* u *harmonisch in* Ω*. Dann ist* u *beliebig oft differenzierbar in* Ω*.*

(ii) **(Satz von Liouville[8])** *Sei* $\Omega = \mathbb{R}^n$*.*

Die Funktion u *ist harmonisch und beschränkt in* $\mathbb{R}^n$ *genau dann, wenn* $u \equiv \mathrm{const}$ *gilt.*

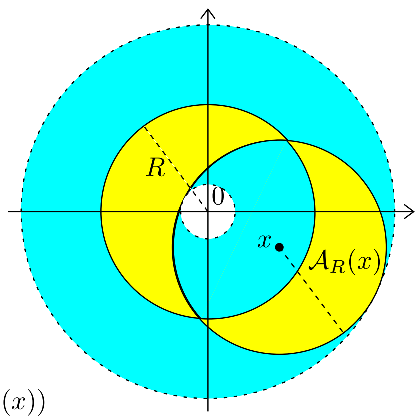
Beweis : zu (i) : seien $x^0 \in \Omega \curvearrowright \widetilde{u}(x) := u(x + x^0)$ harmonisch in $\widetilde{\Omega} := \big\{x \in \mathbb{R}^n \; : \; x + x^0 \in \Omega\big\}$, seien $R > 0$ so, dass $\overline{K_R(x^0)} \subset \Omega$ und $x \in K_R(x^0)$

$$\Longrightarrow \quad u(x) = \widetilde{u}(x - x^0) \underset{\text{Satz 1.8}}{=} \frac{R^2 - |x - x^0|^2}{R\,|\omega_n|} \int\limits_{|y|=R} \frac{\widetilde{u}(y)}{|y - (x - x^0)|^n} \, \mathrm{d}\sigma_y$$

$$= \underbrace{\frac{R^2 - |x - x^0|^2}{R\,|\omega_n|}}_{\in \mathrm{C}^\infty} \underbrace{\int\limits_{|y|=R} \frac{u(y + x^0)}{|y - (x - x^0)|^n} \, \mathrm{d}\sigma_y}_{=: h(x)}$$

$|y| = R, \; |x - x^0| < R \quad \Longrightarrow \quad \big|y - (x - x^0)\big| \geq |y| - |x - x^0| > 0 \quad \Longrightarrow \quad h(x) \in \mathrm{C}^\infty(K_R(x^0))$, d.h. $u(x)$ beliebig oft differenzierbar in $K_R(x^0)$, $x^0 \in \Omega$, $R > 0$ beliebig $\Longrightarrow$ $u(x) \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$

zu (ii) : '$\Longleftarrow$' klar;
seien $x \in \mathbb{R}^n$, $R >> |x|$, verwenden Volumenmittelwert-Eigenschaft, Satz 1.11(iii), für $u(x)$, $u(0)$:



$$u(x) - u(0) = \frac{n}{R^n |\omega_n|} \Bigg(\int\limits_{|y-x| \leq R} u(y) \, \mathrm{d}y - \int\limits_{|y| \leq R} u(y) \, \mathrm{d}y \Bigg)$$

$$\curvearrowright \; |u(x) - u(0)| \leq \frac{n}{R^n |\omega_n|} \int\limits_{K_R(x) \triangle K_R(0)} |u(y)| \, \mathrm{d}y$$

u beschränkt, $|u(x)| \leq c \;\curvearrowright\; |u(x) - u(0)| \leq \dfrac{c\,n}{R^n |\omega_n|} \, |\mathcal{A}_R(x)|$

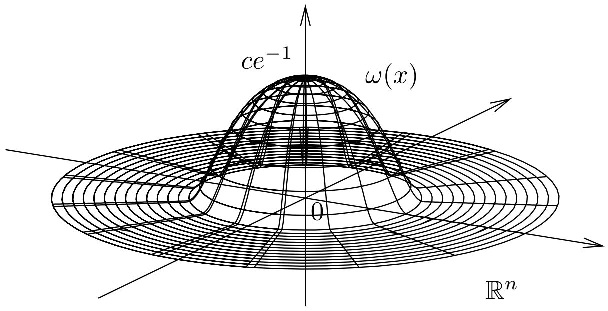
mit $\mathcal{A}_R(x) = K_R(x) \triangle K_R(0) = (K_R(x) \setminus K_R(0)) \cup (K_R(0) \setminus K_R(x))$

[8] Joseph Liouville (* 24.3.1809 Saint-Omer/Frankreich † 8.9.1882 Paris)

$$\curvearrowright\ |\mathcal{A}_R(x)| \leq\ |\omega_n|\,[(R+|x|)^n-(R-|x|)^n] \leq\ c'(x)\ R^{n-1}$$

$$\curvearrowright |u(x)-u(0)|\ \leq\ \frac{c''(x)}{R^n}\ R^{n-1}\ =\ \frac{c''(x)}{R}\ \xrightarrow[R\to\infty]{} 0, \quad x\in\mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow \quad u(x)\equiv u(0), \quad x\in\mathbb{R}^n \qquad \square$$

<u>*Sobolev'sches[9] Mittelungsverfahren*</u>



Sei

$$\omega(x) := \begin{Bmatrix} c\ e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x|<1 \\ 0 \qquad\quad , & |x|\geq 1 \end{Bmatrix},\ x\in\mathbb{R}^n \qquad (14)$$

$\curvearrowright \operatorname{supp}\ \omega = \{x\in\mathbb{R}^n\ :\ |x|\leq 1\}$ kompakt

<u>Beh.</u> : $\omega(x)\in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_j} = c\ e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}\ \frac{-2x_j}{(1-|x|^2)^2} \quad \dashrightarrow\ \cdots\ \dashrightarrow \quad \mathrm{D}^\gamma\omega(x) = c\ e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}\ \frac{\overbrace{p_\gamma(x)}^{\text{Polynom}}}{(1-|x|^2)^{2|\gamma|}}, \quad \gamma\in\mathbb{N}_0^n$$

$$\lim_{|x|\uparrow 1} \mathrm{D}^\gamma\omega(x)\ =\ \lim_{|x|\uparrow 1}\ e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}\ \frac{c\ p_\gamma(x)}{(1-|x|^2)^{2|\gamma|}}\ \underset{t\,=\,\frac{1}{1-|x|^2}}{=}\ \lim_{t\to\infty} e^{-t}\ t^{2|\gamma|}\ \widetilde{p}_\gamma(t)\ =\ 0$$

$\Longrightarrow \quad \omega(x)\in\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, <u>Normierung</u>: wählen c so, dass $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\omega(x)\ \mathrm{d}x\ =\ 1$ gilt

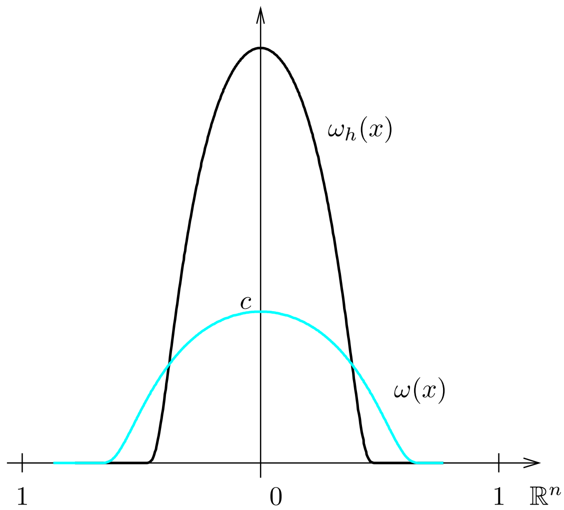
sei jetzt $h>0$, setzen

$$\omega_h(x) := \frac{1}{h^n}\ \omega\left(\frac{x}{h}\right)$$

$\operatorname{supp}\ \omega = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|\leq 1\}\ \curvearrowright$

$$\operatorname{supp}\ \omega_h = \{y\in\mathbb{R}^n\ :\ |y|\leq h\}$$

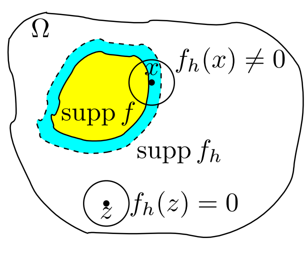
$$\int_{\mathbb{R}^n}\omega_h(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{h^n}\int_{\mathbb{R}^n}\omega\left(\frac{x}{h}\right)\ \mathrm{d}x\ \underset{y\,=\,\frac{x}{h}}{=}\ \int_{\mathbb{R}^n}\omega(y)\ \mathrm{d}y = 1$$



sei $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ beschränkt, mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} f$ in Ω,

$$f_h(x) := (\omega_h * f)(x), \qquad x\in\Omega, \quad 0<h<h_0 \qquad (15)$$

$$\begin{aligned} f_h(x) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^n}\omega_h(x-y)\ \underbrace{f(y)}_{:=0,\ y\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega}\ \mathrm{d}y\ =\ \frac{1}{h^n}\int_{\mathbb{R}^n}\omega\left(\frac{x-y}{h}\right) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &\underset{z\,=\,\frac{x-y}{h}}{=} \quad \int_{\mathbb{R}^n}\underbrace{\omega(z)}_{=0,|z|>1} f(x-hz)\,\mathrm{d}z \quad = \quad \int_{|z|\leq 1}\omega(z)f(x-hz)\,\mathrm{d}z \\ &= \quad \int_{|x-y|\leq h}\omega_h(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$



[9]Sergei Lvovich Sobolev (* 6.10.1908 St. Petersburg † 3.1.1989 Leningrad)

$\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} f) \leq h \underset{\text{i.a.}}{\Longrightarrow} f_h(x) \neq 0, \quad \operatorname{dist}(z, \operatorname{supp} f) > h \quad \Longrightarrow \quad f_h(z) = 0$
$\operatorname{dist}(\operatorname{supp} f, \partial\Omega) > 0 \quad \Longrightarrow$ wählen $h_0 > 0$ so, dass $\operatorname{supp} f_h \subset \Omega, \ 0 < h \leq h_0 \quad \curvearrowright \operatorname{supp} f_h$ kompakt

Beh. : $f_h \in \mathsf{C}^\infty(\Omega)$

sei $t \in \mathbb{R}, \ 0 < |t| < \delta$ klein $\curvearrowright$

$$\frac{f_h(x_1+t, x_2, \ldots, x_n) - f_h(x_1, \ldots, x_n)}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{\omega_h(x_1+t-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n) - \omega_h(x-y)}{t}}_{\frac{\partial}{\partial \xi_1}\omega_h(x_1-y_1+\theta t, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n), \ \text{MWS}, \ 0<\theta<1} f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\operatorname{supp} f} \frac{\partial}{\partial \xi_1}\omega_h\left(x_1-y_1+\theta t, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n\right) f(y)\,\mathrm{d}y$$

$\omega_h \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, f beschränkt $\curvearrowright$

$$\left|\frac{f_h(x_1+t, x_2, \ldots, x_n) - f_h(x_1, \ldots, x_n)}{t}\right| \leq \underbrace{\int_{\operatorname{supp} f} \underbrace{\left|\frac{\partial}{\partial \xi_1}\omega_h\left(x_1-y_1+\theta t, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n\right)\right|}_{\leq c_1} \underbrace{|f(y)|}_{\leq c_2}\,\mathrm{d}y}_{\leq C, \ \operatorname{supp} f \ \text{beschränkt}}$$

$$\underset{\text{Satz}^{10}\text{von Lebesgue}^{11}}{\Longrightarrow} \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{f_h(x_1+t, x_2, \ldots, x_n) - f_h(x_1, \ldots, x_n)}{t}}_{\frac{\partial f_h}{\partial x_1}(x)} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \omega_h}{\partial \xi_1}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y \quad \dashrightarrow \text{existiert}$$

$$\omega_h \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \ h > 0 \ \underset{\text{Iteration}}{\Longrightarrow} \ f_h \in \mathsf{C}^\infty(\Omega), \ 0 < h \leq h_0, \ \mathrm{D}^\gamma f_h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{D}^\gamma \omega_h(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y, \ \gamma \in \mathbb{N}_0^n$$

Folgerung 1.15 *Sei* $u \in \mathsf{C}\left(\overline{\Omega}\right)$, u *besitze die Flächenmittelwert-Eigenschaft in* Ω. *Dann gilt für* $x \in \Omega$

$$u(x) = u_h(x) = (\omega_h * u)(x), \quad 0 < h < h_0.$$

Bemerkung : nach Vorbemerkung folgt daraus sofort Satz 1.14 (i)

B e w e i s : seien $x \in \Omega, \quad h > 0 \ \curvearrowright$

$$u_h(x) = \int_{|x-y|\leq h} \omega_h(x-y) u(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^h \int_{|x-y|=r} \underbrace{\omega_h(x-y)}_{\omega_h(r\theta), \ |\theta|=1} u(y)\,\mathrm{d}\sigma_y\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^h \omega_h(r\theta) \underbrace{\int_{|x-y|=r} u(y)\,\mathrm{d}\sigma_y}_{r^{n-1}|\omega_n| u(x), \ r<r_0, \ \text{Vor.}}\,\mathrm{d}r = u(x) \underbrace{\int_{|z|\leq h} \omega_h(z)\,\mathrm{d}z}_{1} = u(x), \quad 0 < h < h_0$$

□

[10] f_k, f messbar in Ω, $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ f.ü., $|f_k| \leq g$ f.ü., $k \in \mathbb{N}$, $\int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}x < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$

[11] Henri Léon Lebesgue (* 28.6.1875 Beauvais, Picardie/Frankreich † 26.7.1941 Paris)

1.5 Das Dirichlet-Problem

Definition 1.16 (inneres Dirichlet-Problem für Δ)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet und* $\varphi \in \mathrm{C}(\partial\Omega)$. *Gesucht wird eine Funktion* $u \in \mathrm{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ *mit*

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \quad , \quad x \in \Omega \\ u(y) &= \varphi(y) \quad , \quad y \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Satz 1.17 *Das innere Dirichlet-Problem für den Laplace-Operator besitzt höchstens eine Lösung.*

Beweis : seien u_1, u_2 Lösungen $\Longrightarrow$ $u := u_1 - u_2$ löst $\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u(x) &=& 0 \quad , \quad x \in \Omega \\ u(y) &=& 0 \quad , \quad y \in \partial\Omega \end{array} \right\}$

u harmonisch in Ω, o.B.d.A. u reell (sonst zerlegen)

$\xRightarrow[\text{Satz 1.12}]{} \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max\limits_{y\in\partial\Omega} u(y) = 0 = \min\limits_{y\in\partial\Omega} u(y) = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \quad \Longrightarrow \quad u(x) \equiv 0,\ x \in \overline{\Omega} \iff u_1 \equiv u_2$ □

Bemerkung : Die Lösungen für das Dirichlet-Problem hängen stetig von den Randwerten ab : sei u_i Lösung von

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u(x) &=& 0 \quad , \quad x \in \Omega \\ u(y) &=& \varphi_i(y) \quad , \quad y \in \partial\Omega \end{array} \right\}, \quad i = 1, 2,$$

$$\curvearrowright \max_{x\in\overline{\Omega}} |u_1(x) - u_2(x)| \le \max_{y\in\partial\Omega} |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|$$

Satz 1.18 (Poissonsche Formel)

Seien $\Omega = K_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ *und* $\varphi \in \mathrm{C}(\partial K_R(0))$ *gegeben. Die eindeutig bestimmte Lösung des inneren Dirichlet-Problems für die Laplace-Gleichung wird durch*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{R|\omega_n|} \displaystyle\int\limits_{|y|=R} \dfrac{\varphi(y)}{|y-x|^n}\, \mathrm{d}\sigma_y & , \quad |x| < R \\ \varphi(x) & , \quad |x| = R \end{cases}$$

gegeben.

Beweis : <u>1. Schritt</u> : *Laplace-Gleichung* $\Delta u(x) = 0$

$|x| < R \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\varphi(y)}{|y-x|^n}$ stetig, $\dashrightarrow$ Vertauschung Differentiation und Integration $\curvearrowright$

$$\Delta_x u(x) = \frac{1}{R|\omega_n|} \int\limits_{|y|=R} \varphi(y)\, \Delta_x \left(\frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^n} \right) \mathrm{d}\sigma_y$$

<u>*g.z.z.*</u> : $\quad \Delta_x \left(\dfrac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^n} \right) = 0 \qquad (16)$

entweder direkt oder mit Trick : $n \ge 3 \quad \Longrightarrow \quad \Delta_x \left(\dfrac{1}{|y-x|^{n-2}} \right) = 0,\ y \neq x \quad \curvearrowright$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_x \left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} \right) = \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|y-x|^{n-2}} \right) = (n-2)\, \Delta_x \left(\frac{x_j - y_j}{|y-x|^n} \right) \qquad (17)$$

$$n = 2 \quad \Longrightarrow \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_x (\ln|x-y|) = \Delta_x \left(\frac{y_j - x_j}{|y-x|^2} \right) \qquad (18)$$

andererseits ist für $|y| = R$

$$\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n} = \frac{|y|^2-|x-y+y|^2}{|y-x|^n} = \frac{|y|^2-\overbrace{\langle (x-y)+y,(x-y)+y\rangle}^{|x-y+y|^2}}{|y-x|^n}$$

$$= \frac{|y|^2-|x-y|^2-|y|^2-\langle x-y,y\rangle-\langle y,x-y\rangle}{|y-x|^n}$$

$$= \frac{-|x-y|^2-2\langle x-y,y\rangle}{|y-x|^n} = -\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - 2\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{x_j-y_j}{|y-x|^n}$$

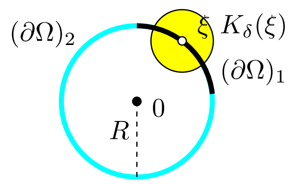
$$\Longrightarrow \quad \Delta_x\left(\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n}\right) = -\underbrace{\Delta_x\left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}}\right)}_{0,\ \text{Grundlösung}} - 2\sum_{j=1}^{n} y_j \underbrace{\Delta_x\left(\frac{x_j-y_j}{|y-x|^n}\right)}_{0,\ (17),\ (18)} = 0$$

<u>2. Schritt</u> : *Stetigkeit von* $u(x)$ *in* $\overline{\Omega}$; $x \in \Omega$ klar nach 1. Schritt;
sei $\xi \in \partial\Omega$, $|\xi| = R$, <u>z.z.</u> : $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x, |x-\xi| < \delta \ : \ |u(x)-u(\xi)| < \varepsilon$
$x \in \partial\Omega = \partial K_R(0) \dashrightarrow |u(x)-u(\xi)| = |\varphi(x)-\varphi(\xi)| < \varepsilon$, φ stetig, sei jetzt $|x| < R$

$$\underset{(9)}{\Longrightarrow} 1 = \frac{R^2-|x|^2}{R\,|\omega_n|}\int\limits_{|y|=R} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|y-x|^n}, \quad n \ge 2 \ \underset{\text{Satz 1.8}}{\Longrightarrow} \ u(x) - \underbrace{u(\xi)}_{\varphi(\xi)} = \frac{R^2-|x|^2}{R\,|\omega_n|}\int\limits_{|y|=R} \frac{\varphi(y)-\varphi(\xi)}{|y-x|^n}\,\mathrm{d}\sigma_y$$

$$\Longrightarrow \quad |u(x)-u(\xi)| \le \underbrace{\frac{R^2-|x|^2}{R\,|\omega_n|}\int\limits_{(\partial\Omega)_1} \frac{|\varphi(y)-\varphi(\xi)|}{|y-x|^n}\,\mathrm{d}\sigma_y}_{I_1} + \underbrace{\frac{R^2-|x|^2}{R\,|\omega_n|}\int\limits_{(\partial\Omega)_2} \frac{|\varphi(y)-\varphi(\xi)|}{|y-x|^n}\,\mathrm{d}\sigma_y}_{I_2}$$

mit $(\partial\Omega)_1 \cup (\partial\Omega)_2 = \partial K_R(0)$



φ stetig auf $\partial K_R(0) \dashrightarrow$ wählen $(\partial\Omega)_1 \subset \partial K_R(0)$ so klein, dass

$$\max_{y\in(\partial\Omega)_1} |\varphi(y)-\varphi(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Longrightarrow \quad I_1 < \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\frac{R^2-|x|^2}{R\,|\omega_n|}\int\limits_{(\partial\Omega)_1} \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{|y-x|^n}}_{\le 1,\ (9)} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

φ stetig auf $\partial K_R(0) \dashrightarrow |\varphi(y)-\varphi(\xi)| \le 2 \max\limits_{y\in\partial K_R(0)} |\varphi(y)| \le M$, $\quad y \in (\partial\Omega)_2$

wählen $\delta_0 > 0$ mit $K_\delta(\xi) \cap \partial K_R(0) \subset (\partial\Omega)_1$ für $\delta < \delta_0$, $\operatorname{dist}(K_\delta(\xi), (\partial\Omega)_2) > 0$
sei $x \in K_\delta(\xi) \implies |y-x| \ge c_\delta$, $y \in (\partial\Omega)_2 \quad \curvearrowright$

$$I_2 = \frac{R^2-|x|^2}{R\,|\omega_n|}\int\limits_{(\partial\Omega)_2} \frac{\overbrace{|\varphi(y)-\varphi(\xi)|}^{\le 2M}}{\underbrace{|y-x|^n}_{\ge c_\delta^n}}\,\mathrm{d}\sigma_y \le \frac{R^2-|x|^2}{R\,|\omega_n|}\,\frac{2M}{c_\delta^n}\underbrace{\int\limits_{(\partial\Omega)_2}\mathrm{d}\sigma_y}_{\le R^{n-1}|\omega_n|} \le \frac{2M}{c_\delta^n}\,R^{n-2}\underbrace{(R+|x|)(R-|x|)}_{R^2-|x|^2}$$

$$\le c\,R^{n-1}(R-|x|) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad x \in K_\delta(\xi),\ \delta < \delta(\varepsilon)$$

$$\Longrightarrow \quad |u(x)-u(\xi)| < \varepsilon \qquad \text{für} \quad |x-\xi| < \delta(\varepsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathrm{C}\left(\overline{K_R(0)}\right)$$ □

Bemerkung : Seien Ω zusammenhängend, beschränkt, mit glattem Rand $\partial\Omega$, φ stetig auf $\partial\Omega$. Dann besitzt das innere Dirichlet-Problem auf Ω genau eine Lösung $u \in \mathrm{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ (siehe z.B. [Tri92a]).

1.6 Die Poisson-Gleichung

Definition 1.19 (inneres Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet,* $f \in \mathsf{C}(\Omega)$ *und* $\varphi \in \mathsf{C}(\partial\Omega)$. *Gesucht wird eine Funktion* $u \in \mathsf{C}^2(\Omega) \cap \mathsf{C}(\overline{\Omega})$ *mit*

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= f(x) \quad , \quad x \in \Omega \\ u(y) &= \varphi(y) \quad , \quad y \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Satz 1.20 *Sei* $f \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R}^n)$ *mit kompaktem Träger* $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$. *Dann ist das* Newton[12]sche Potential

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(z) \, \ln|x-z| \, \mathrm{d}z & , \quad n = 2 \\ -\dfrac{1}{(n-2)|\omega_n|} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \dfrac{f(z)}{|x-z|^{n-2}} \, \mathrm{d}z & , \quad n \geq 3 \end{cases}$$

mit $u \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R}^n)$ *eine Lösung der* Poisson-Gleichung $\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$.

B e w e i s : o.B.d.A. $n \geq 3$

$$u(x) = -\frac{1}{(n-2)|\omega_n|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(z)}{|x-z|^{n-2}} \, \mathrm{d}z \underset{y = x - z}{=} -\frac{1}{(n-2)|\omega_n|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-2}} \, \mathrm{d}y$$

$$\Longrightarrow \quad u(x+h) - u(x) = -\frac{1}{(n-2)|\omega_n|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x+h-y) - f(x-y)}{|y|^{n-2}} \, \mathrm{d}y$$

sei $R > 0$ so, dass $\operatorname{supp} f \subset K_R(0) \quad \Longrightarrow \quad |f(z)| \leq M, \ z \in K_R(0),$ sei $|h| \leq 1$

$$\Longrightarrow \quad |f(x+h-y) - f(x-y)| \leq \begin{cases} 2M & , \quad |x-y| < R+1 \\ 0 & , \quad |x-y| \geq R+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x+h-y) - f(x-y)}{|y|^{n-2}} \, \mathrm{d}y \right| \\ & \leq \int_{|x-y|<R+1} \frac{\overbrace{|f(x+h-y) - f(x-y)|}^{\leq 2M}}{|y|^{n-2}} \, \mathrm{d}y + \int_{|x-y|\geq R+1} \frac{\overbrace{|f(x+h-y) - f(x-y)|}^{0}}{|y|^{n-2}} \, \mathrm{d}y \\ & \leq 2M \underbrace{\int_{|x-y|<R+1} |y|^{2-n} \, \mathrm{d}y}_{<\infty} \leq c \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{h \downarrow 0} |u(x+h) - u(x)| \leq \frac{1}{(n-2)|\omega_n|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lim_{h\downarrow 0} |f(x+h-y) - f(x-y)|}{|y|^{n-2}} \, \mathrm{d}y = 0$$

analog für $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}, \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}, \ j, k = 1, \ldots, n \quad \Longrightarrow \quad u \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R}^n)$, da $f \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R}^n)$,

[12] Sir Isaac Newton (* 4.1.1643 Woolsthorpe/England † 31.3.1727 London)

$$\curvearrowright \quad \Delta u(x) \;=\; -\,\frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\Delta_z f(z)}{|x-z|^{n-2}}\,\mathrm{d}z \;=\; -\,\frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\Delta_x f(x-y)}{|y|^{n-2}}\,\mathrm{d}y \qquad (19)$$

verwenden jetzt Greensche Darstellungsformel für $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} f \subset K_R(0) =: \Omega$, und $x \in K_R(0)$

$$\xRightarrow[\text{Satz 1.5}]{} \; f(x) \;=\; \int\limits_{|y|=R}\Big[\gamma_x(y)\underbrace{\frac{\partial f}{\partial\nu}(y)}_{0} - \underbrace{f(y)}_{0}\frac{\partial\gamma_x}{\partial\nu}(y)\Big]\,\mathrm{d}\sigma_y \;-\; \int\limits_{K_R(0)}\underbrace{\gamma_x(z)}_{\frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\,\frac{1}{|x-z|^{n-2}}}\;\Delta f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\; -\,\frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\int\limits_{K_R(0)}\frac{\Delta f(z)}{|x-z|^{n-2}}\,\mathrm{d}z \;=\; -\,\frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\Delta f(z)}{|x-z|^{n-2}}\,\mathrm{d}z$$

$$\xRightarrow[(19)]{} \; \Delta u(x) = -\,\frac{1}{(n-2)|\omega_n|}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\Delta f(z)}{|x-z|^{n-2}}\,\mathrm{d}z = f(x),\; x\in K_R(0) \;\xrightarrow[\substack{R>0\\ \text{bel. groß}}]{}\; \Delta u(x) = f(x),\;\; x\in\mathbb{R}^n \qquad \square$$

Bemerkung : schwächere Bedingungen an f möglich, z.B. $\operatorname{supp} f$ kompakt, $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n)$

<u>*Bezeichnung*</u> : sei $(\mathcal{N}f)(x) := \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(z)\,\ln|x-z|\,\mathrm{d}z & ,\; n=2 \\ -\,\dfrac{1}{(n-2)|\omega_n|}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(z)}{|x-z|^{n-2}}\,\mathrm{d}z & ,\; n\geq 3\end{array}\right\}$ ... Newton-Potential

Satz 1.21 *Seien* $\Omega = K_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathrm{C}(\partial K_R(0))$ *und* $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^n)$ *mit kompaktem Träger* $\operatorname{supp} f$ *gegeben. Dann besitzt das innere Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung genau eine Lösung* $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)\cap\mathrm{C}(\overline{\Omega})$,

$$u(x) = \begin{cases} (\mathcal{N}f)(x) \;+\; \dfrac{R^2-|x|^2}{R|\omega_n|}\displaystyle\int\limits_{|y|=R}\frac{\varphi(y)-(\mathcal{N}f)(y)}{|y-x|^n}\,\mathrm{d}\sigma_y & ,\;\; |x|<R \\ \varphi(x) & ,\;\; |x| = R\,. \end{cases}$$

B e w e i s : seien

$$u_{\mathrm{hom}}(x) := \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{R^2-|x|^2}{R|\omega_n|}\displaystyle\int\limits_{|y|=R}\frac{\varphi(y)-(\mathcal{N}f)(y)}{|y-x|^n}\,\mathrm{d}\sigma_y & ,\;\; |x|<R \\ \varphi(x)-(\mathcal{N}f)(x) & ,\;\; |x|=R \end{array}\right\}, \quad u_{\mathrm{inh}}(x) := (\mathcal{N}f)(x)$$

und $u(x) := u_{\mathrm{hom}}(x) + u_{\mathrm{inh}}(x)$ $\curvearrowright$

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \underbrace{\Delta\, u_{\mathrm{hom}}(x)}_{0,\ \text{Satz 1.18}} + \underbrace{\Delta\, u_{\mathrm{inh}}(x)}_{f(x),\ \text{Satz 1.20}} = f(x) \;\;,\;\; x\in K_R(0) \\ u(y) &= \underbrace{u_{\mathrm{hom}}(y)}_{\varphi(y)-(\mathcal{N}f)(y)} + \underbrace{u_{\mathrm{inh}}(y)}_{(\mathcal{N}f)(y)} = \varphi(y) \;\;,\;\; |y| = R \end{aligned}$$

Stetigkeit von $\varphi(x)-(\mathcal{N}f)(x)$ auf $\partial K_R(0)$ folgt aus Voraussetzung und Satz 1.20 $\square$