Boolean Hierarchies - On Collapse Properties and Query Order

Harald Hempel

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Institut für Informatik

Die Dissertationsschrift untersucht anhand Boolescher Hierarchien über Σ_k^p, $k \geq 1$, zwei zentrale Fragestellungen der Komplexitätstheorie, zum einen die Auswirkungen der Gleichheit als verschieden angesehener Berechnungsmodelle und zum anderen die Berechnungskraft der Reihenfolge von Orakelfragen.
Es ist bekannt, daß ein Kollaps der Booleschen Hiearchie über NP, das heißt die Gleichheit zweier allgemein als verschieden angesehener Klassen dieser Hierarchie, den Kollaps der Polynomialzeithierarchie nach sich zieht. Im Verlauf des letzten Jahrzehnts wurde die Tiefe dieses induzierten Kollapses der Polynomialzeithierarchie fortlaufend verbessert. Wir setzen diese Reihe von Arbeiten fort und zeigen, daß ein stärkerer (induzierter) Kollaps der Polynomialzeit folgt, der weit über das hinausgeht, was bisher bekannt war.
Daß sich innerhalb von Booleschen Hierarchien über Σ_k^p ein Kollaps nach oben überträgt, das heißt die Gleichheit zweier Klassen der Booleschen Hierarchie die Gleichheit aller größeren Klassen nach sich zieht, ist seit langem bekannt. Das Gegenteil, ein Kollaps überträgt sich nach unten, ist bisher in der Komplexitätstheorie sehr selten beobachtet worden. Erste Ergebnisse dieser Art im Zusammenhang mit Booleschen Hierarchien wurden erst in den letzten Jahren bekannt. Wir analysieren diese jüngste Entwicklung und verbessern eines der zentralen Ergebnisse in diesem Umfeld. Neben dem Beweis neuer Resultate enthält die Arbeit einen detaillierten Abriß der Entwicklung der zugrundeliegenden Beweistechnik, der sogenannten easy-hard Technik.
Es ist unbestritten, daß die Reihenfolge, in der wir im täglichen Leben auf Informationsquellen zugreifen, wesentlich ist. Informationsquellen werden in der Komplexitätstheorie durch sogenannte Orakel modelliert. Wir untersuchen die Bedeutung der Reihenfolge von Orakelfragen. Dieses Thema ist bisher nicht untersucht worden. Es zeigt sich, daß im Rahmen der Booleschen Hierarchien die Reihenfolge von Orakelfragen wesentlichen Einfluß auf die Berechnungskraft hat.

1 Strukturelle Komplexitätstheorie

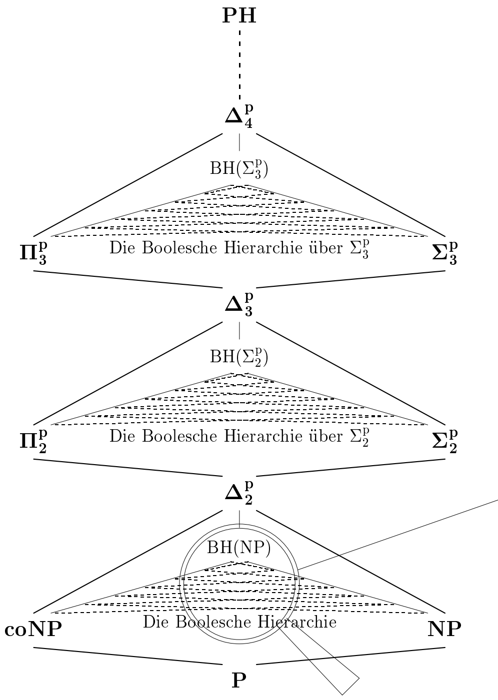
Komplexitätstheorie beschäftigt sich mit der Klassifizierung von Berechnungsproblemen. Berechnungsmodell sind die verschiedenen Typen von Turingmaschinen. Es werden deterministische und nichtdeterministische Turingmaschinen betrachtet, die bei jeder Eingabe höchstens polynomial (in der Länge der Eingabe) viele Schritte arbeiten und Fragen an ein Entscheidungsproblem, das auch Orakel genannt wird, stellen können. Die Antworten auf die Orakelfragen stehen den Maschinen innerhalb eines Arbeitsschrittes zur Verfügung.

Die Berechnungsprobleme, wir beschränken uns auf reine Entscheidungsprobleme, werden gemäß den zu ihrer Lösung von einer Turingmaschine benötigten Ressourcen in Komplexitätsklassen eingeteilt. Mit Ressourcen meinen wir, insbesondere in Hinblick auf die vorliegende Arbeit, zum Beispiel die Berechnungskraft des benötigten Orakels, die Anzahl der gestellten Orakelfragen, oder die Art und Weise, in der Orakelfragen gestellt werden. Wichtiger Gegenstand der strukturellen Komplexitätstheorie ist das Studium der Beziehungen zwischen den Komplexitätsklassen und den zugrundeliegenden Berechnungsmodellen. Bekannte Beispiele für Komplexitätsklassen sind P und NP, die Mengen all derjenigen Probleme, die sich in Polynomialzeit von einer deterministischen bzw. nichtdeterministischen Turingmaschine lösen lassen.

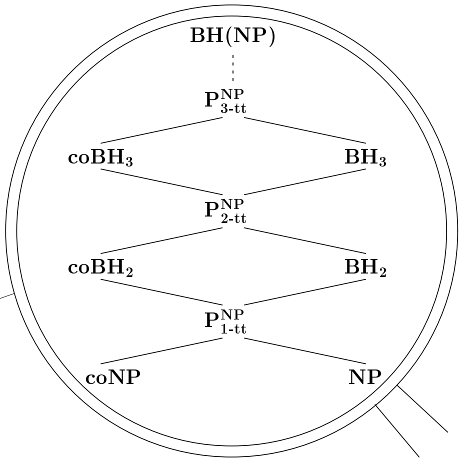
Die Polynomialzeithierarchie, PH, bildet eine zentrale Struktur innerhalb der Menge der Komplexitätsklassen. Ihre Stufen (bestehend aus jeweils drei Komplexitätsklassen) werden induktiv mittels Orakelzugriff auf kleinere Stufen definiert. Für eine Komplexitätsklasse $\mathcal{C}$ definiert $\mathrm{P}^{\mathcal{C}}$ ($\mathrm{NP}^{\mathcal{C}}$) die Klasse aller Mengen (Entscheidungsprobleme), die sich mit Hilfe von Orakelfragen an ein Orakel aus der Klasse $\mathcal{C}$ deterministisch (nichtdeterministisch) in polynomialer Zeit lösen lassen. $\Delta_1^{\mathrm{p}} = \mathrm{P}$, $\Sigma_1^{\mathrm{p}} = \mathrm{NP}$ und $\Pi_1^{\mathrm{p}} = \mathrm{coNP} = \{\overline{L} : L \in \mathrm{NP}\}$ bilden die erste Stufe der Polynomialzeithierarchie. Für $k \geq 1$ ist die $(k+1)$te Stufe der Polynomialzeithierarchie als $\Delta_{k+1}^{\mathrm{p}} = \mathrm{P}^{\Sigma_k^{\mathrm{p}}}$, $\Sigma_{k+1}^{\mathrm{p}} = \mathrm{NP}^{\Sigma_k^{\mathrm{p}}}$ und $\Pi_{k+1}^{\mathrm{p}} = \mathrm{co}\Sigma_{k+1}^{\mathrm{p}}$ definiert. Obwohl ein Beweis für die Unendlichkeit der Polynomialzeithierarchie noch aussteht, wird dies gemeinhin nicht angezweifelt.

Die Boolesche Hierarchie über Σ_k^{p}, $\mathrm{BH}(\Sigma_k^{\mathrm{p}})$, bildet eine Hierarchie von Komplexitätsklassen zwischen der $k$ten und der $(k+1)$ten Stufe der Polynomialzeithierarchie. Die Stufen von $\mathrm{BH}(\Sigma_k^{\mathrm{p}})$ sind als die Mengen der Probleme definiert, die sich als Mengendifferenzen von Mengen aus Σ_k^{p} darstellen lassen. So ist $\mathrm{DIFF}_1(\Sigma_k^{\mathrm{p}}) = \Sigma_k^{\mathrm{p}}$ und die $m$te Stufe, $m \geq 2$, der Booleschen Hierarchie über Σ_k^{p} definiert als $\mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^{\mathrm{p}}) = \{L_1 - (L_2 - (L_3 - \cdots (L_m - L_m) \cdots)) : L_1, L_2, L_3, \ldots, L_m \in \Sigma_k^{\mathrm{p}}\}$. Aus historischen Gründen wird $\mathrm{DIFF}_m(\mathrm{NP})$ auch mit BH_m bezeichnet.

Eine eng verwandte Struktur ist die Bounded-Truth-Table-Hierarchie über Σ_k^{p}.



Die Polynomialzeithierarchie und die Booleschen Hierarchien über Σ_k^{p}.



Die Boolesche Hierarchie und die Bounded-Truth-Table Hierarchie.

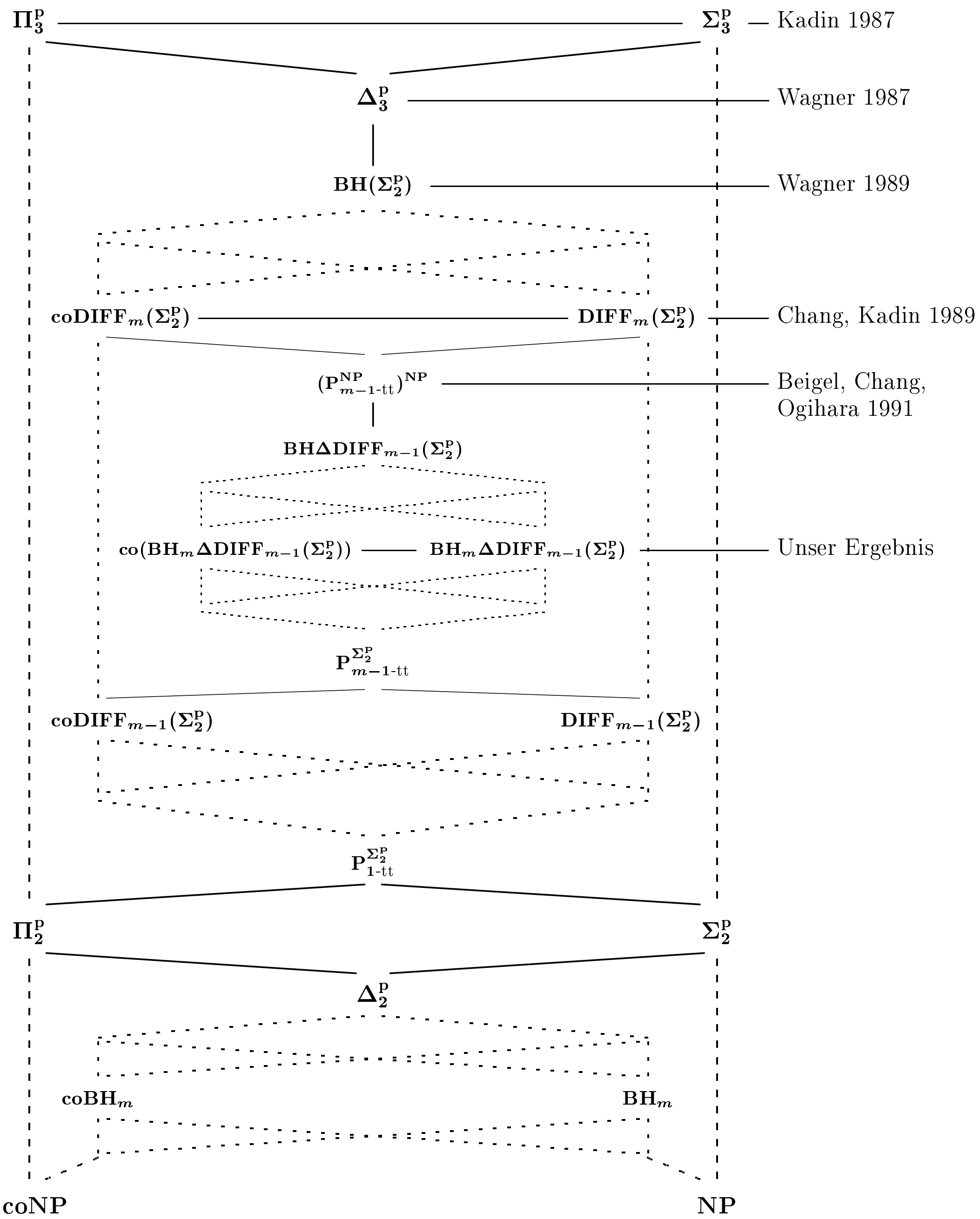
Sie ist mittels Beschränkung der Anzahl der simultan von einer deterministischen Polynomialzeitturingmaschine (DPTM) gestellten Orakelfragen definiert. Ihre $m$te Stufe, $\mathrm{P}_{m\text{-tt}}^{\Sigma_k^{\mathrm{p}}}$, ist die Menge aller Probleme, die sich von einer DPTM lösen lassen, die höchstens m Fragen parallel an ein Orakel aus Σ_k^{p} stellt, das heißt alle m Fragen werden erzeugt, bevor auch nur eine Antwort vom Orakel gegeben wird. Die Stufen der Booleschen und der Bounded-Truth-Table Hierarchie über Σ_k^{p} stehen in enger Beziehung zueinander, es gilt für alle $k, m \geq 1$, $\mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^{\mathrm{p}}) \cup \mathrm{coDIFF}_m(\Sigma_k^{\mathrm{p}}) \subseteq \mathrm{P}_{m\text{-tt}}^{\Sigma_k^{\mathrm{p}}} \subseteq \mathrm{DIFF}_{m+1}(\Sigma_k^{\mathrm{p}}) \cap \mathrm{coDIFF}_{m+1}(\Sigma_k^{\mathrm{p}})$.
Eine wesentliche Rolle spielen in dieser Arbeit Komplexitätsklassen der Form $\mathcal{C}\boldsymbol{\Delta}\mathcal{D}$. Dabei sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Komplexitätsklassen und $\mathcal{C}\boldsymbol{\Delta}\mathcal{D}$ ist die Klasse all der Mengen, die sich als symmetrische Differenz einer Menge aus $\mathcal{C}$ und einer Menge aus $\mathcal{D}$ darstellen lassen. Es gilt zum Beispiel für alle $m, k \geq 1$, $\mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^{\mathrm{p}}) = \underbrace{\Sigma_k^{\mathrm{p}}\boldsymbol{\Delta}\Sigma_k^{\mathrm{p}}\boldsymbol{\Delta}\cdots\boldsymbol{\Delta}\Sigma_k^{\mathrm{p}}}_{m \text{ mal}}$. Ist $\mathcal{C}$ eine Komplexitätsklasse und gilt $\mathrm{P} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^{\mathrm{p}}) \cap \mathrm{coDIFF}_m(\Sigma_k^{\mathrm{p}})$, so folgt $\mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^{\mathrm{p}}) \cup \mathrm{coDIFF}_m(\Sigma_k^{\mathrm{p}}) \subseteq \mathcal{C}\boldsymbol{\Delta}\mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^{\mathrm{p}}) \subseteq \mathrm{DIFF}_{m+1}(\Sigma_k^{\mathrm{p}}) \cap \mathrm{coDIFF}_{m+1}(\Sigma_k^{\mathrm{p}})$. So bilden zum Beispiel die Klassen $\mathrm{DIFF}_s(\Sigma_i^{\mathrm{p}})\boldsymbol{\Delta}\mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^{\mathrm{p}})$, wobei $s, i, m, k \geq 1$ und $i < k$, eine Verfeinerung der Booleschen Hierarchie über Σ_k^{p}.

2 Die PH kollabiert, wenn die BH kollabiert: Eine noch stärkere Verbindung

Es ist nicht bekannt, ob die Boolesche Hierarchie (über NP) bzw. die Bounded-Truth-Table Hierarchie (über NP) unendliche Strukturen sind. Bekannt ist, angesichts ihrer miteinander verwobenen Strukturen, daß der Kollaps der einen Hierarchie den Kollaps der anderen nach sich zieht. Einen Hinweis darauf, daß die Boolesche Hierarchie unendlich ist, liefert die Tatsache, daß ein Kollaps der Booleschen Hierarchie einen Kollaps der Polynomialzeithierarchie verursacht [Kad88]. In einer Reihe von Arbeiten, [Wag87, Wag89, CK96, BCO93], wurde die Tiefe des Kollapses der Polynomialzeithierarchie, der von einem Kollaps der Booleschen Hierarchie ausgelöst wird, fortlaufend verbessert. Diese Entwicklung ist in dem umseitigen Bild dargestellt. Das beste bisher bekannte Ergebnis [BCO93] besagt, wenn die Boolesche Hierarchie auf ihrer $m$ten Stufe kollabiert, wenn also $\mathrm{BH}_m = \mathrm{coBH}_m$ gilt, dann kollabiert die Polynomialzeithierarchie auf $(\mathrm{P}^{\mathrm{NP}}_{m-1\text{-tt}})^{\mathrm{NP}}$, die Klasse all der Probleme, die mit $m-1$ parallelen Fragen an ein Orakel aus Σ^{p}_2 und einer unbeschränkten Anzahl von Fragen an ein Orakel aus NP von einer DPTM gelöst werden können.
Wir analysieren die Entwicklung der zugrundeliegenden Beweistechnik, der, auf Kadin [Kad88] zurückgehenden, sogenannten easy-hard Technik. Wir verbessern das obige Ergebnis aus [BCO93] und zeigen, daß ein stärkerer Kollaps der Polynomialzeithierarchie unter der gleichen Voraussetzung, die Boolesche Hierarchie kollabiert auf der Stufe m, folgt.

SATZ 1 *Für alle $m > 1$ gilt:*
Kollabiert die Boolesche Hierarchie auf der Stufe m, so kollabiert die Polynomialzeithierarchie auf die Klasse $\mathrm{BH}_m \boldsymbol{\Delta} \mathrm{DIFF}_{m-1}(\Sigma^{\mathrm{p}}_2)$.

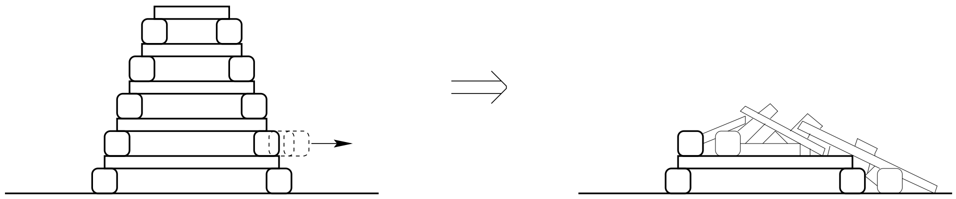
Mit anderen Worten, ist $\mathrm{BH}_m = \mathrm{coBH}_m$ so folgt $\mathrm{BH}_m \boldsymbol{\Delta} \mathrm{DIFF}_{m-1}(\Sigma^{\mathrm{p}}_2) = \Sigma^{\mathrm{p}}_3 = \Pi^{\mathrm{p}}_3 = \Sigma^{\mathrm{p}}_4 = \ldots$. Als unmittelbare Folgerungen ergeben sich weitere Kollapsaussagen, die bekannte Ergebnisse verbessern. Zum Beispiel, aus einem Kollaps der Bounded-Truth-Table Hierarchie auf der Stufe m, $\mathrm{P}^{\mathrm{NP}}_{m\text{-tt}} = \mathrm{P}^{\mathrm{NP}}_{m+1\text{-tt}}$, folgt nun ein Kollaps der Polynomialzeithierarchie auf die Klasse $\mathrm{BH}_{m+1} \boldsymbol{\Delta} \mathrm{DIFF}_m(\Sigma^{\mathrm{p}}_2)$. Alle Ergebnisse übertragen sich analog auf die Boolesche Hierarchie und die Bounded-Truth-Table Hierarchie über Σ^{p}_k, $k \geq 1$. Zusammen mit den Ergebnissen betreffend des sich nach unten übertragenden Kollapses aus [HHH97b] kann jetzt aus einem Kollaps der Bounded-Truth-Table Hierarchie über Σ^{p}_k, $k > 1$, auf der Stufe m sogar ein Kollaps der Polynomialzeithierarchie auf die Klasse $\mathrm{DIFF}_m(\Sigma^{\mathrm{p}}_k) \boldsymbol{\Delta} \mathrm{DIFF}_{m-1}(\Sigma^{\mathrm{p}}_{k+1})$ gefolgert werden.



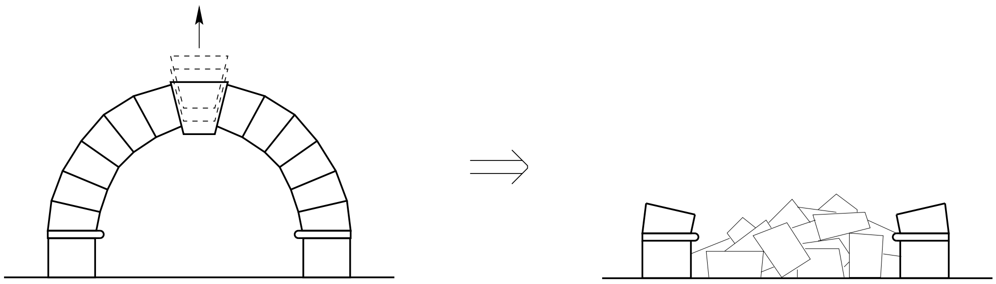
In den aufgeführten Arbeiten wurde ausgehend von einem Kollaps $BH_m = coBH_m$ ein Kollaps der Polynomialzeithierarchie auf die Klasse(n) an der zugehörigen waagerechten Linie bewiesen.

3 Sich nach unten übertragender Kollaps von Komplexitätsklassen

In vielen hierarchischen Strukturen, die in der strukturellen Komplexitätstheorie untersucht werden, zieht die Gleichheit kleinerer Komplexitätsklassen die Gleichheit größerer Komplexitätsklassen nach sich. Man nennt das sich nach oben übertragenden Kollaps von Komplexitätsklassen, der Kollaps der kleineren Komplexitätsklassen überträgt sich nach oben. Ein illustrierendes Beispiel hierfür ist ein Turm aus Bausteinen. Ist ein Baustein "gleich" einem anderen, bzw. wird er entfernt, so stürzen alle darüber befindlichen Bausteine hinunter auf die Höhe, auf der ursprünglich ein Stein entfernt wurde. Klassisches Beispiel einer Hierarchie von Komplexitätsklassen, die die Eigenschaft des sich nach oben übertragenden Kollapses besitzt, ist die Polynomialzeithierarchie. Es gilt für alle $k \geq 1$, ist $\Sigma_k^{\mathrm{p}} = \Pi_k^{\mathrm{p}}$ so folgt $\Sigma_k^{\mathrm{p}} = \Pi_k^{\mathrm{p}} = \Sigma_{k+1}^{\mathrm{p}} = \Pi_{k+1}^{\mathrm{p}} = \Sigma_{k+2}^{\mathrm{p}} = \ldots$.



Der umgekehrte Fall, der sich nach unten übertragende Kollaps, ist eine eher seltene Beobachtung in der Komplexitätstheorie. Einige wenige isolierte Ergebnisse, deren prinzipielle Struktur die ist, daß die Gleichheit großer Komplexitätsklassen die Gleichheit kleiner Komplexitätsklassen nach sich zieht, wenn auch nicht in der strengen Form, die wir unten beschreiben, sind seit längerem bekannt. Ein illustrierendes Beispiel hierfür finden wir im romanischen Rundbogen. Wird der Schlußstein entfernt, stürzen auch Steine, die sich darunter befinden, in die Tiefe.



Insbesondere verstehen wir unter der Bezeichnung "sich nach unten übertragender Kollaps" Ergebnisse der Form "Wenn $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ dann $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$", wobei

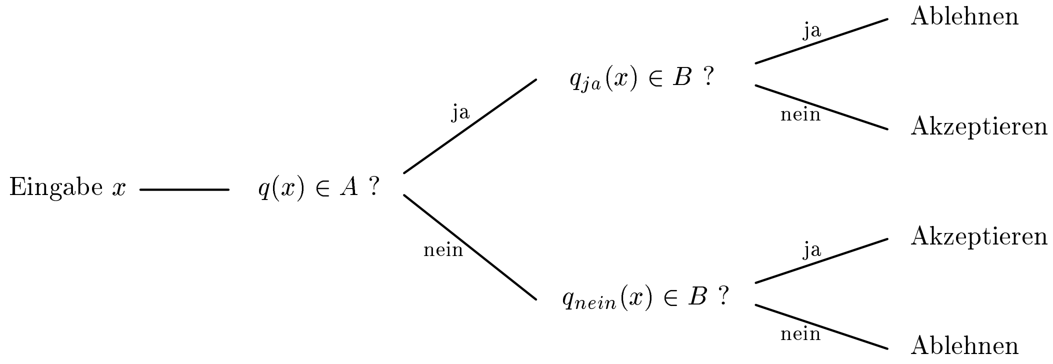
einerseits $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ und andererseits nicht bekannt ist, ob $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ gilt.
Die Frage "Was passiert wenn $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$?" ist deshalb von besonderem Interesse, weil man in der Komplexitätstheorie oft eben nicht in der Lage ist, von bekannten Inklusionsbeziehungen festzustellen, ob es sich um echte Inklusionen handelt oder nicht. Gelingt es dann dennoch, Aussagen der obigen Form zu beweisen, hat man eine starke Verbindung zwischen den zugrundeliegenden Berechnungsmodellen der Klassen $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ hergestellt. Insbesondere hat man dann gezeigt, daß der Unterschied zwischen den "stärkeren" Berechnungsmodellen von $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ mit dem Unterschied zwischen den "schwächeren" Berechnungsmodellen von $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ steht und fällt.
Erste Ergebnisse dieser Form, die sich ausschließlich auf Klassen der Polynomialzeithierarchie (und Klassen, die durch beschränkten Orakelzugriff auf Klassen der Polynomialzeithierarchie definiert sind) beziehen, wurden in [HHH96a] bewiesen. Für $k > 2$ gilt $\mathrm{P}^{\Sigma_k^\mathrm{p}}_{1\text{-tt}} = \mathrm{P}^{\Sigma_k^\mathrm{p}}_{2\text{-tt}}$ impliziert $\Sigma_k^\mathrm{p} = \Pi_k^\mathrm{p}$. Verschiedene Verallgemeinerungen dieses Ergebnisses wurden in [HHH99, BF98, HHH97b] erzielt. Das allgemeinste (bekannte) Ergebnis besagt, für alle $k > 1$ gilt, aus $\mathrm{P}^{\Sigma_k^\mathrm{p}}_{m\text{-tt}} = \mathrm{P}^{\Sigma_k^\mathrm{p}}_{m+1\text{-tt}}$ folgt $\mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p}) = \mathrm{coDIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p})$ [HHH97b].
Die Beweise der genannten Aussagen basieren auf der (modifizierten) easy-hard Technik. Wir analysieren ihre Anwendung und Entwicklung, die zu immer stärkeren Ergebnissen in diesem Zusammenhang geführt hat. Besonderen Wert legen wir dabei auf einen vollständigen technischen Abriß der Entwicklung der easy-hard Technik, eine Entwicklung, die von Kadin [Kad88] bis hin zu den jüngsten Modifizierungen [HHH99, BF98, HHH97b] reicht.
Der Beweis für das oben genannte Resultat aus [HHH97b] basiert auf dem folgenden Satz: Für alle $m \geq 1$ und alle $0 < i < k-1$ gilt, ist $\Sigma_i^\mathrm{p} \boldsymbol{\Delta} \mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p})$ unter Komplementbildung abgeschlossen, so kollabiert die Boolesche Hierarchie über Σ_k^p auf der Stufe m, $\mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p}) = \mathrm{coDIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p})$. Wir verallgemeinern dieses Resultat, indem wir die Assymmetrie in seiner Voraussetzung beseitigen.

SATZ 2 *Es gilt für alle $s, m, i, k \geq 1$ wobei $i < k-1$:*
Ist $\mathrm{DIFF}_s(\Sigma_i^\mathrm{p}) \boldsymbol{\Delta} \mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p})$ unter Komplementbildung abgeschlossen, so kollabiert die Boolesche Hierarchie über Σ_k^p auf der Stufe m.

Das heißt, aus $\mathrm{DIFF}_s(\Sigma_i^\mathrm{p}) \boldsymbol{\Delta} \mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p}) = \mathrm{co}(\mathrm{DIFF}_s(\Sigma_i^\mathrm{p}) \boldsymbol{\Delta} \mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p}))$ folgt $\mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p}) = \mathrm{coDIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p})$. Da $\mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p})$ und $\mathrm{coDIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p})$ sowohl in $\mathrm{DIFF}_s(\Sigma_i^\mathrm{p}) \boldsymbol{\Delta} \mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p})$ als auch in $\mathrm{co}(\mathrm{DIFF}_s(\Sigma_i^\mathrm{p}) \boldsymbol{\Delta} \mathrm{DIFF}_m(\Sigma_k^\mathrm{p}))$ enthalten sind und diese Inklusion echt ist, sofern die Polynomialzeithierarchie eine echte (unendliche) Hierarchie ist, enthält das obige Ergebnis einen sich nach unten übertragenden Kollaps von Komplexitätsklassen. Das Ergebnis hat eine Reihe von interessanten Anwendungen.

4 Zur Berechnungskraft der Reihenfolge von Orakelfragen

Die Reihenfolge, in der wir im täglichen Leben auf Informationsquellen zugreifen, ist von entscheidenter Bedeutung. Wir untersuchen nun, ob eine ähnliche Aussage auch in der strukturellen Komplexitätstheorie getroffen werden kann. In der Komplexiätstheorie werden Informationsquellen durch Orakel modelliert. Sei $\mathrm{P}^{\mathcal{C}:\mathcal{D}}$ die Klasse all der Problem, die mit einer DPTM gelöst werden können, die zuerst eine Orakelfrage an ein Orakel aus $\mathcal{C}$ und danach eine Orakelfrage an ein Orakel aus $\mathcal{D}$ stellt.



Potentielles Verhalten einer $\mathrm{P}^{\mathcal{C}:\mathcal{D}}$-Turingmaschine bei Eingabe x; $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{D}$. Die Linien symbolisieren Teile der deterministische Berechnung. Die Maschine setzt die Berechnung nach einer Oraklefrage gemäß der Orakelantwort fort.

Wir untersuchen, ob $\mathrm{P}^{\mathcal{C}:\mathcal{D}} = \mathrm{P}^{\mathcal{D}:\mathcal{C}}$, wenn $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Klassen $\mathrm{BH}_m = \mathrm{DIFF}_m(\mathrm{NP})$ aus der Booleschen Hierarchie über NP sind. Es zeigt sich, daß in fast allen Fällen die Reihenfolge der Orakelfragen, in diesem Zusammenhang, essentiell für die Berechnungskraft der Komplexitätsklasse ist. Es gilt $\mathrm{P}^{\mathrm{BH}_j:\mathrm{BH}_k} = \mathrm{P}^{\mathrm{BH}_k:\mathrm{BH}_j}$, falls entweder $j = k$, oder j ist gerade und $k = j+1$, oder k ist gerade und $j = k+1$. In allen anderen Fällen gilt $\mathrm{P}^{\mathrm{BH}_j:\mathrm{BH}_k} \neq \mathrm{P}^{\mathrm{BH}_k:\mathrm{BH}_j}$, es sei denn, die Polynomialzeithierarchie kollabiert. Die genannten Aussagen folgen aus einer allgemeinen Charakterisierung der Klassen $\mathrm{P}^{\mathrm{BH}_j:\mathrm{BH}_k}$.

SATZ 3 *Für alle $j, k \geq 1$ gilt,*

$$\mathrm{P}^{\mathrm{BH}_j:\mathrm{BH}_k} = \begin{cases} \mathrm{P}^{\mathrm{NP}}_{j+2k-1\text{-}tt} & \textit{falls } j \textit{ gerade und } k \textit{ ungerade,} \\ \mathrm{P}^{\mathrm{NP}}_{j+2k\text{-}tt} & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Der Satz besagt, daß die Berechnungskraft des zweiten Orakels doppelt so schwer wiegt wie die des ersten Orakels, man also mehr berechnen kann, wenn

man die schwerere Frage als zweites stellt. Mit Blick auf die Illustration zur Arbeitsweise einer $\mathrm{P}^{\mathcal{C}:\mathcal{D}}$-Turingmaschine ist diese Feststellung nicht mehr so überraschend, denn potentiell kann ja eine derartige Maschine zwei verschiedene Fragen an das zweite Orakel generieren.
Im Gegensatz zu den obigen Aussagen stehen Ergebnisse über die Reihefolge von Orakelfragen wenn die Orakel zu verschiedenen Stufen der Polynomialzeithierarchie gehören. In [HHH98b] wurde gezeigt, daß für alle $i, \ell \geq 1$ die Gleichung $\mathrm{P}^{\Sigma_i^p:\Sigma_\ell^p} = \mathrm{P}^{\Sigma_\ell^p:\Sigma_i^p}$ gilt. Verallgemeinert auf aufeinanderfolgende Runden von zwei oder mehr parallelen Fragen gilt für alle $i, \ell, j, k \geq 1$ mit $i < \ell$, daß $\mathrm{P}_{j,k\text{-tt}}^{\Sigma_i^p:\Sigma_\ell^p} = \mathrm{P}_{k,j\text{-tt}}^{\Sigma_\ell^p:\Sigma_i^p}$ [BC]. Dabei ist $\mathrm{P}_{j,k\text{-tt}}^{\Sigma_i^p:\Sigma_\ell^p}$ die Klasse all der Probleme, die von einer DPTM gelöst werden können, die erst j parallele Orakelfragen an ein Orakel aus Σ_i^p und danach k parallele Fragen an ein Orakel aus Σ_ℓ^p stellt.
Wir lösen den offenen Fall $i = \ell$ in der obigen Aussage aus [BC]. Wir zeigen daß auch in diesem Fall die Reihenfolge der Fragerunden vertauscht werden kann, es gilt $\mathrm{P}_{j,k\text{-tt}}^{\Sigma_i^p:\Sigma_i^p} = \mathrm{P}_{k,j\text{-tt}}^{\Sigma_i^p:\Sigma_i^p}$ für alle $i, j, k \geq 1$. Man beachte, daß obwohl in jedem konkreten Lauf einer $\mathrm{P}_{j,k\text{-tt}}^{\Sigma_i^p:\Sigma_i^p}$-Turingmaschine höchstens $j + k$ Fragen insgesamt gestellt werden, eine solche Maschine aber potentiell $j + 2^j k$ verschiedene Fragen generieren kann. Dennoch gilt folgende Charakterisierung:

SATZ 4 *Für alle $i, j, k \geq 1$ gilt* $\mathrm{P}_{j,k\text{-}tt}^{\Sigma_i^p:\Sigma_i^p} = \mathrm{P}_{j+jk+k\text{-}tt}^{\Sigma_i^p}$.

Literatur

[BC] R. Beigel and R. Chang. Commutative queries. *Information and Computation.* Erscheint.

[BCO93] R. Beigel, R. Chang, and M. Ogiwara. A relationship between difference hierarchies and relativized polynomial hierarchies. *Mathematical Systems Theory*, 26:293–310, 1993.

[BF98] H. Buhrman and L. Fortnow. Two queries. In *Proceedings of the 13th Annual IEEE Conference on Computational Complexity*, 13–19. IEEE Computer Society Press, 1998.

[CK96] R. Chang and J. Kadin. The boolean hierarchy and the polynomial hierarchy: A closer connection. *SIAM Journal on Computing*, 25(2):340–354, 1996.

[HHH99] E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra, and H. Hempel. A downward collapse within the polynomial hierarchy. *SIAM Journal on Computing*, 28(2):383–393, 1999.

[HHH98b] E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra, and H. Hempel. Query order in the polynomial hierarchy. *Journal of Universal Computer Science*, 4(6):574–588, 1998.

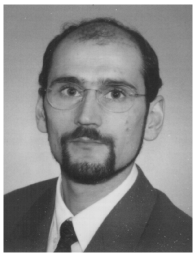
[HHH96a] E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra, and H. Hempel. An upward separation in the polynomial hierarchy. Forschungsbericht Math/Inf/96/15, Institut für Informatik, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Juni 1996.

[HHH97b] E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra, and H. Hempel. Translating equality downwards. Technical Report TR-657, Department of Computer Science, University of Rochester, Rochester, NY, April 1997.

[Kad88] J. Kadin. The polynomial time hierarchy collapses if the boolean hierarchy collapses. *SIAM Journal on Computing*, 17(6):1263–1282, 1988. Erratum appears in the same journal, 20(2):404.

[Wag87] K. Wagner. Number-of-query hierarchies. Technical Report 158, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, Oktober 1987.

[Wag89] K. Wagner. Number-of-query hierarchies. Technical Report 4, Institut für Informatik, Universität Würzburg, Februar 1989.



Harald Hempel, geboren am 7.August 1969 in Jena, wohnhaft in Jena, verheiratet, 1 Kind; von 1976 bis 1986 Besuch der polytechnischen Oberschule in Weimar; 1986 Wechsel an die Spezialklassen für Mathematik und Physik an der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Abitur 1988; danach Wehrdienst; von 1989 bis 1992 Studium der Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena, Vordiplom 1991; von 1992 bis 1993 Studienaufenthalt an der University of Colorado at Boulder, Colorado, USA; von 1993 bis 1994 Fortsetzung des Studiums der Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena, 15.6.1994 Diplom in Mathematik; seit 1994 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Informatik der Friedrich-Schiller-Universität Jena, Forschungsschwerpunkt strukturelle Komplexitätstheorie; 2.10.1998 Promotion