Übungen zur Vorlesung
"Maß und Integral"

9. Serie

1. Es bezeichne $(M, \mathcal{M}, m)$ einen Maßraum und $\mathcal{N}$ das System aller m-Nullmengen. (Eine Menge $N \subseteq M$ heißt m-Nullmenge, falls eine Menge $B \in \mathcal{M}$ mit $N \subseteq B$ und $m(B) = 0$ existiert.) Weiterhin bezeichne $\mathcal{M}^m$ die in der Vorlesung eingeführte Vervollständigung der σ-Algebra $\mathcal{M}$ bezüglich des Maßes m. Man zeige: 4 P

   (a) $A \in \mathcal{M}^m$ genau dann, wenn $A = B \cup N$ mit $B \in \mathcal{M}$ und $N \in \mathcal{N}$ gilt.

   (b) $\mathcal{M}^m$ ist die kleinste σ-Algebra, die sowohl $\mathcal{M}$ als auch $\mathcal{N}$ enthält.

2. Es sei $(M, \mathcal{M}, m)$ ein beliebiger meßbarer Raum, und es bezeichne $\mathcal{M}^m$ die in der Vorlesung eingeführte Vervollständigung der σ-Algebra $\mathcal{M}$ bezüglich des Maßes m. Man beweise: 4 P
   Eine Abbildung $f : M \to \hat{\mathbb{R}}$ ist genau dann meßbar (erweitert reell) auf $(M, \mathcal{M}^m)$, wenn es meßbare (erweitert reelle) Funktionen f_1 und f_2 auf $(M, \mathcal{M})$ mit $f_1 \leq f \leq f_2$ und $m(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$ gibt.

3. Es sei $(M, \mathcal{M})$ ein meßbarer Raum und δ_{x_0} das Dirac-Maß in $x_0 \in M$. 3 P

   (a) Man überlege sich, daß für jede meßbare (erweitert reelle) Funktion f auf $(M, \mathcal{M})$ das Integral $\int_M f \, d\delta_{x_0}$ existiert.

   (b) Man berechne das Integral $\int_M f \, d\delta_{x_0}$.

   (c) Wann ist f bezüglich δ_{x_0} integrierbar?

4. Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathcal{P}\mathbb{N}$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}\mathbb{N})$ ist durch die Beziehung 4 P

$$m(\{n\}) = 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

   eindeutig festgelegt. Eine meßbare (erweitert reelle) Funktion auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}\mathbb{N})$ ist durch eine beliebige Folge (a_n) von Elementen aus $\hat{\mathbb{R}}$ vermöge

$$f(n) = a_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

   gegeben.

   (a) Man untersuche, unter welchen Bedingungen das Integral von f bezüglich m existiert.

   (b) Man berechne das Integral $\int_{\mathbb{N}} f \, dm$.

(c) Wann ist eine Funktion f bezüglich m integrierbar?

Abgabe: 1. Gruppe: Mittwoch, 21. Juni 2006, zur Übungszeit
2. Gruppe: Freitag, 23. Juni 2006, zur Übungszeit