

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
(Wiederholung)
SS 2018, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse

Ausgabetermin: 01.05.2018
Abgabetermin: 08.05.2018

4. Übungsblatt

Aufgabe 1. Skizzieren Sie die Zähldichte und die Verteilungsfunktion

- a) einer Bernoulli-verteilten Zufallsvariable,
- b) einer geometrisch verteilten Zufallsvariable,
- c) einer Poisson-verteilten Zufallsvariable mit Parameter $\lambda = 1$,
- d) einer Poisson-verteilten Zufallsvariable mit Parameter $\lambda = 5$.

Aufgabe 2. Sei X eine Zufallsvariable gegeben durch

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{c}{k(k+1)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

1. Bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}X = \infty$.

Aufgabe 3. Die Anzahl der Meteoriten mit einer Mindestgröße von 1m, die innerhalb von 10 Jahren auf der Erde einschlagen, sei Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda = 2$.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 10 Jahren mindestens 2 Meteoriten mit einer Mindestgröße von 1m einschlagen.
- b) Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl der Meteoriten mit einer Mindestgröße von 1m, die innerhalb von 50 Jahren auf der Erde einschlagen. Sie können dabei davon ausgehen, dass die Einschlagverteilungen disjunkter Zeiträume unabhängig sind.

🏠 **Aufgabe 4** (4 Punkte). Für ein $p \in (0, 1)$ habe X die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 - p^2, & -1 \leq x < 0, \\ 1 - p^2 + \frac{1}{4}xp^2, & 0 \leq x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Bestimmen Sie

- a) $\mathbf{P}(X = -1)$,
- b) $\mathbf{P}(X = 0)$,
- c) $\mathbf{P}(X \geq -\frac{1}{2})$,
- d) $\mathbf{P}(X^2 \leq 2X)$.

♣ **Aufgabe 5** (4 Punkte). Welche Verteilung ist sinnvollerweise zu verwenden?

- a) Die Durchführung eines bestimmten Versuchs dauert eine Stunde. Dabei tritt ein erwünschter Effekt mit einer Wahrscheinlichkeit von 13% auf. Welche Zeit ist zu veranschlagen, um den Effekt mit einer Sicherheit von 98% mindestens einmal zu beobachten?
- b) Ein Bäcker hat 100 frische Brote und 20 altbackene, die er 'auf gut Glück' darunter mischt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde, der drei Brote kauft, wenigstens ein altbackenes erhält.
- c) Ein Arbeiter bedient 16 Maschinen zugleich. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der Maschinen in einem bestimmten Zeitintervall seine Aufmerksamkeit erfordert, sei 25%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 4 Maschinen in diesem Zeitintervall seine Aufmerksamkeit erfordern?
- d) Um zu entscheiden, ob eine Warenlieferung angenommen werden soll, wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 5$ entnommen. Enthält die Stichprobe kein fehlerhaftes Teil, so wird die Lieferung angenommen, enthält sie mehr als ein Ausschusstück, wird die Lieferung zurückgewiesen. Enthält Sie hingegen genau ein Ausschusstück, so wird eine weitere Stichprobe genommen und die Warenlieferung abgewiesen, falls diese zweite Stichprobe nicht ausschussfrei ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Lieferung, wenn ihr Ausschussanteil 1% beträgt?

Hinweis: Es ist nicht nötig die Aufgaben komplett zu lösen. Geben Sie stattdessen eine geeignete Verteilung und gegebenenfalls die zugehörigen Parameter an.

♣ **Aufgabe 6** (4 Punkte). In einem See befindet sich eine unbekannte Zahl von Fischen. Man entnehme dem See zufällig 20 Fische, markiere diese und setze sie danach wieder in den See. Nach einiger Zeit entnehme man wiederum zufällig 50 Fische. Von diesen 50 Fischen sind 4 markiert.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für diese Beobachtung, vorausgesetzt im Teich befinden sich insgesamt 100, 200, 300 bzw. 400 Fische?
- b) Bei welcher Anzahl von Fischen im Teich wird die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses maximal?

Hinweis: Es sei p_N die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses unter der Annahme, dass sich N Fische im Teich befinden. Überprüfen Sie, für welche N der Wert von p_{N-1} kleiner oder gleich p_N ist und wann größer und schließen Sie hieraus auf den maximalen Wert.

Abgabetermin: Die mit ♣ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Dienstag abzugeben. Es wird dringend empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.