# Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Wiederholung)

SS 2018, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse

| | |
|---|---|
| Ausgabetermin: | 22.05.2018 |
| Abgabetermin: | 29.05.2018 |

## 7. Übungsblatt

**Aufgabe 1.**

a) Sei $X$ eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}_+$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(X \geq k\right).$$

b) Sei $X$ eine stetige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}_+$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(X \geq x)\, \mathrm{d}x.$$

c) Sei $X$ eine beliebige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$.
Für welches $a = a(X) \in \mathbb{R}$ wird der Ausdruck $\mathbb{E}(X-a)^2$ minimiert?

d) Sei $X$ eine beliebige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$.
Für welches $b = b(X) \in \mathbb{R}$ wird der Ausdruck $\mathbb{E}|X-a|$ minimiert?

**Aufgabe 2.** Sie haben die Möglichkeit, für eine bestimmte Teilnahmegebühr an folgendem Gewinnspiel teilzunehmen: Eine faire Münze wird solange geworfen bis erstmals Zahl oben liegt. Angenommen der $k$-te Wurf zeigt erstmals Zahl. Dann gewinnt der Teilnehmer $2^{k-1}$ Geldeinheiten (GE), d.h. fällt beim ersten Wurf gleich Zahl, so gewinnt der Teilnehmer 1 GE, fällt Zahl erstmals beim zweiten Wurf 2 GE, u.s.w. Wie hoch müsste die Teilnahmegebühr ausfallen, damit diese dem erwarteten Gewinn des Spiels entspricht?

**Aufgabe 3.** Sei $U$ eine auf $[0,1]$ uniform verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie Funktionen $g_i$, $i = 1,2$, sodass $X_i = g_i(U)$ folgendermaßen verteilt sind.

a) Es gilt $\mathbf{P}(X_1 = k) = \mathbf{P}(X_1 = -k) = 2^{-k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) $X_2$ besitzt die Dichte

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

**Aufgabe 4** (5 Punkte)**.** Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} cx(x-1), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$, sodass $f$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion, skizzieren Sie diese und bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten für die Zufallsvariable $X$, die die oben gegebene Dichte besitzt:

$$\mathbf{P}(-1 < X \leq 1/4), \quad \mathbf{P}(1/2 \leq X < 2).$$

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X$.

d) Definieren Sie den Begriff $\alpha$–Quantil und geben Sie das 1/2–Quantil an.

**Aufgabe 5** (4 Punkte)**.** Sei $X \sim \text{Uni}([a,b])$, $a < b$.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X$.

b) Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion $m_X$.

**Aufgabe 6** (3 Punkte)**.** Eine zufällige Permutation $\sigma$ der Zahlen $\{1,\dots,n\}$ besitzt möglicherweise Fixpunkte $i \in \{1,\dots,n\}$ für die gilt $\sigma(i) = i$. Beispielsweise für $n = 5$ besitzt die Permutation $\sigma_1 = (2,4,3,1,5)$ zwei Fixpunkte, während die Permutation $\sigma_2 = (5,3,2,1,4)$ keinen Fixpunkt besitzt.
Bei der zufälligen Auswahl der Permutationen handelt es sich um ein Laplace-Experiment, d.h. die Wahrscheinlichkeit für jede Permutation beträgt $\frac{1}{n!}$.
Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl aller Fixpunkte von $\sigma$.

**Hinweis:** Es ist sehr schwierig die Verteilung der Anzahl der Fixpunkte zu bestimmen. Einfacher ist es zu zählen, bei wie vielen Permutationen eine gegebene Position $i \in \{1,\dots,n\}$ ein Fixpunkt ist.
Definieren Sie anschließend die Zufallsvariablen

$$X_i(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma(i) = i, \\ 0, & \text{falls } \sigma(i) \neq i, \end{cases}$$

für $i = 1,\dots,n$ und bestimmen Sie ihre Verteilung.
Wie kann man nun die Anzahl aller Fixpunkte mit Hilfe der $X_i$ darstellen?

**Abgabetermin:** Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Dienstag abzugeben. Es wird dringend empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.