Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Wiederholung)

SS 2018, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse

Ausgabetermin:	29.05.2018
Abgabetermin:	05.06.2018

8. Übungsblatt

Aufgabe 1. Bei der maschinellen Abfüllung von $500\,\text{cm}^3$–Milchflaschen wird das abgefüllte Flüssigkeitsvolumen F als normalverteilt mit den Parametern $\mu_F = 500$ (in cm^3) und $\sigma_F^2 = 16$ (in cm^6) angenommen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine $500\,\text{cm}^3$–Milchflasche weniger als $490\,\text{cm}^3$ Milch enthält?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die eingefüllte Milch überläuft, wenn das Volumen der Milchflasche V unabhängig vom eingefüllten Flüssigkeitsvolumen F normalverteilt ist mit den Parametern $\mu_V = 510$ (in cm^3) und $\sigma_V^2 = 9$ (in cm^6)?

Aufgabe 2. Für eine Zufallsvariable X ist die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $w_X \colon \mathbb{R}_+ \to [0, \infty]$ definiert als

$$w_x(t) := \mathbb{E}t^X.$$

a) Zeigen Sie, dass $m_X(t) = w_X(e^t)$.

b) Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable zum Parameter $p \in (0, 1)$, d.h.

$$\mathbf{P}(X = k) = p^{k-1}(1 - p), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion w_X und die momenterzeugende Funktion m_X.

Aufgabe 3. Es sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}(X_k = i) = \frac{1}{6}$, $i = 1, \ldots, 6, k \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie folgende Zufallsvariablen inhaltlich und berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.

a) $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} X_k$,

b) $S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(X_k = 6)$,

c) $S_n^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(X_k \geq 4, X_{k+1} \geq 4)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

a) Sei X eine beliebige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X).$$

b) Seien X_1, X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2).$$

⬆ **Aufgabe 5** (4 Punkte)**.** Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ c, & x \in (-1, 0], \\ 1 - x, & x \in (0, 1], \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

a) Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

b) Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F.

c) Bestimmen Sie die Quantile $x_{0.25}$, $x_{0.5}$ und $x_{0.75}$.

⬆ **Aufgabe 6** (4 Punkte)**.**

a) Sei Y eine nichtnegative Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mathbf{P}(Y \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}Y}{\varepsilon}.$$

b) Verwenden Sie $a)$ um die Tschebyscheff-Ungleichung zu zeigen

c) Sie werfen n-mal einen fairen Würfel. Sei p_n die Wahrscheinlichkeit, in mindestens 20% der Würfe eine 6 zu würfeln. Zeigen Sie, dass $p_n \to 0$, für $n \to \infty$.

Abgabetermin: Die mit ⬆ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Dienstag abzugeben. Es wird dringend empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.